



Tikrit Journal of Administrative and Economics Sciences

مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية

EISSN: 3006-9149

PISSN: 1813-1719



Comparison between the Bayesian method and the Particle Swarm Algorithm for Estimating a Spatial Autoregressive Model

Omar Ramzi Jasim^{*A}, Sarmad Abdulkhaleq Salih^B

^A College of Administration and Economics/Al-Hamdaniya University

^B College of Education for Pure Sciences/Al-Hamdaniya University

Keywords:

Spatial autoregressive model, multivariate t distribution, Particle Swarm Optimization algorithm, Bayesian method.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 14 May. 2024
Accepted 23 Jun. 2024
Available online 30 Sep. 2024

©2023 THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE
UNDER THE CC BY LICENSE

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Corresponding author:

Omar Ramzi Jasim

Department of Business
Administration/ College of
Administration and Economics/
Al-Hamdaniya University



Abstract: The spatial autoregressive model is one of the models that is very similar to ordinary time series models, as the spatial mixed model is formed when the spatially lagged dependent variable is included as one of the explanatory variables. To find out whether or not there is spatial dependence between these variables, a spatial autoregressive model is used Moran Test. If this reliability is ignored or not taken into consideration, this leads to the loss of important information. Accordingly, in the research, the spatial autoregressive model was estimated when the model error is distributed with a mixed distribution (represented by the t-distribution) by the Bayesian method when the initial information is available from one side of the artificial intelligence algorithm, represented by the Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm from On the other hand, the application to real data related to the poverty gap sample in developing countries for the years (2005-2010-2015-2020) and through the Moran test and the Lagrange multiplier showed that there is a spatial autocorrelation between the observations and the researchers concluded that the subsequent probability distribution of the vector of parameters ($-\theta$) follows a multivariate t distribution, and the posterior probability distribution of the variance parameter was an uncommon but appropriate distribution (Proper), in addition to the superiority of the PSO algorithm for estimating the spatial autoregressive model with heavy tails in the Bayesian manner through the criteria of mean square error and mean relative error.

المقارنة بين الطريقة البيزية وخوارزمية سرب الطيور لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي

سرمد عبدالخالق صالح
كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة الحمدانية

عمر رمزي جاسم
كلية الادارة والاقتصاد
جامعة الحمدانية

المستخلص

يُعد نموذج الانحدار الذاتي الحيزي من النماذج المشابهة وبحد كبير إلى نماذج السلاسل الزمنية الاعتيادية، إذ يتكون النموذج حيزي المختلط عندما يتم ادراج المتغير المعتمد (Dependent variables) المتخلف حيزياً كأحد المتغيرات التوضيحية (Explanatory variables) ولمعرفة وجود الاعتمادية الحيزية من عدمها بين تلك المتغيرات تم استعمال اختبار موران (Moran Test). وفي حالة تجاهل أو عدم أخذ تلك الاعتمادية بنظر الاعتبار يؤدي هذا إلى ضياع معلومات هامة. وعليه تم في البحث تقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي عندما يتوزع خطأ النموذج بتوزيع مختلط (Mixed Distribution) والمتمثل بتوزيع (t) بالطريقة البيزية عندما تكون المعلومات الأولية متوفرة من جانب واحد خوارزمية الذكاء الاصطناعي والمتمثلة بخوارزمية سرب الطيور (Particle Swarm optimization (PSO)) من جانب آخر، والتطبيق على بيانات حقيقية تتعلق بعينة فجوة الفقر في الدول النامية للسنوات (2005-2010-2015-2020) ومن خلال اختبار موران ومضاعف لاكرانج (Lagrange multiplier) تبين بأن هنالك ارتباط ذاتي حيزي بين المشاهدات واستنتج الباحثان بأن التوزيع الاحتمالي اللاحق لمتجه المعلمات θ يتبع توزيع t متعدد المتغيرات وإن التوزيع الاحتمالي اللاحق لمعلمة التباين كان توزيعاً غير شائعاً ولكنه ملائم (Proper) فضلاً عن تفوق خوارزمية سرب الطيور لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهايات الثقيلة على الطريقة البيزية من خلال معياري متوسط مربعات الخطأ ومتوسط الخطأ النسبي.

الكلمات المفتاحية: نموذج الانحدار الذاتي الحيزي، توزيع t متعدد المتغيرات، خوارزمية سرب الطيور، طريقة بيز.

المقدمة

يُلاحظ في أغلب الدراسات والبحوث العلمية افتراض صفة الاستقلالية بعدها شرط من الشروط الواجب تحققها عند استعمال التحليلات الكلاسيكية، إلا أن وجود علاقة ذاتية بين مشاهدات الظاهرة قيد الدراسة يعرف في أغلب الأحيان بالارتباط الذاتي (Auto Correlation) يجب أخذها بنظر الاعتبار. وبناءً على ما تقدم فإن عملية التحليل الاحصائي لتلك البيانات لا تتوقف على معالجة وجود ارتباط ذاتي بين بيانات السلاسل الزمنية فقط بل قد تتعدى إلى دراسة تلك المسافات الحيزية بين المشاهدات بشكل أو آخر كبديل عن المسافات الزمنية، لذلك فإن نماذج الانحدار الحيزية تكون أكثر ملائمة في هذه الحالة.

استعمل (Lesage, 2004)^[11] الطريقة الكلاسيكية والمتمثلة بطريقة الامكان الأعظم لتقدير معلمات نموذج الانحدار الذاتي الحيزي والخطأ الحيزي عندما يكون خطأ النماذج طبيعياً ولعدة

مصنوفات أوزان حيزية فضلاً عن التطبيق على مثال حقيقي للمقارنة بين مقدرات المعلمات المقدرة من خلال الاعتماد على برنامج الـ SPSS.

قدر كل من (علي وهادي (2014))^[3] نماذج الانحدار الحيزي لنسب الفقر في اقصية العراق لسنة 2012 بعد استعمال اختبار موران لمعرفة وجود الاعتمادية الحيزية من عدمها فضلاً عن استعمالهم لمصنوفات وزن مختلفة والتي تؤخذ بنظر الاعتبار تأثير الجوارات بين الأقسية، ومن خلال الدراسة لوحظا تفوق نموذج الانحدار الحيزي على نموذج الانحدار العام من خلال معايير مقارنة مختلفة المستخدمة.

كما قام (الخطاب (2024))^[2] بدراسة وتحليل أثر بعض مؤشرات الشمول المالي وهي (المقترضون من البنوك التجارية لكل 1000 بالغ (BFCB) وماكينات الصراف الآلي لكل 100 الف بالغ (ATMAD) وفروع البنوك التجارية لكل 100 الف بالغ (CBBA) على عينة الفقر في الدول النامية للسنوات (2005-2010-2015-2020) بالاعتماد على نموذج الأثر الثابت والأثر التجميعي واستنتج الباحث أن للشمول المالي أثر سلبي على الفقر في الدول النامية.

تضمن البحث مقدمة عامة في المبحث الأول وتوزيع t الاحتمالي متعدد المتغيرات في المبحث الثاني وفي المبحث الثالث تم وصف نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهاية الثقيلة وعرض مصنوفة الأوزان الحيزية واختبارات الاعتماد الحيزي في المبحث الرابع والخامس والسادس وفي المبحث السابع تم تقدير معلمات النموذج باستعمال الطريقة الكلاسيكية فضلاً عن الطريقة البيزية عند توفر معلومات أولية خبرية في المبحث الثامن وتناول المبحث التاسع خوارزمية سرب الطيور والمبحث العاشر تضمن جانباً تطبيقياً يتعلق بالمقارنة بين خوارزمية سرب الطيور والطريقة البيزية للنموذج من خلال عينة الفقر في الدول النامية وذكر أهم الاستنتاجات والتوصيات التي توصل إليها البحث في المبحث الحادي عشر.

1. دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع t متعدد المتغيرات: يعد توزيع t متعدد المتغيرات من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المختلطة ذات الذيل الثقيلة المتماثلة فهو ناتج من خلط التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وتوزيع معكوس كاما، وعليه سيتم في هذا البحث معاملة معلمة القياس (Scale Parameter) على أنها متغير عشوائي تتبع توزيع معكوس كاما بالمعلمات: [6]

$$S^2 = IG\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right)$$

ودالة كثافة الاحتمال لتوزيع معكوس كاما تكون معرفة بالشكل الآتي: [6]

$$f(S^2) = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{v/2}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} S^{2-\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{v}{2S^2}}, \quad S^2 > 0 \quad \dots (1)$$

فإذا كان المتجه العشوائي (Y) المشروط بـ (S^2) يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد والذي يوصف بالشكل الآتي:

$$(Y|S^2) \sim N\left(\underline{\mu}, S^2 \sigma^2 I_n\right)$$

وإن دالة الكثافة الاحتمالية لـ $(Y|S^2)$ هي:

$$f(Y|S^2) = \frac{1}{(2\pi S^2 \sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2S^2 \sigma^2} (Y - \mu)^T (Y - \mu)}, \quad -\infty < Y < \infty \quad \dots (2)$$

وبدمج المعادلتين (1) و (2) فيما بينهم وبالإستعانة بمفهوم التوزيعات المختلطة نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (t) متعدد المتغيرات وكالاتي: [10]

$$f(Y) = \int_0^\infty f(Y|S^2) f(S^2) dS^2$$

$$f(Y) = \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2}) (\sigma^2 \pi)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}} \left[1 + \frac{1}{v\sigma^2} (Y - \mu)^T (Y - \mu) \right]^{-\frac{(v+n)}{2}} \quad \dots (3)$$

إذ إن:

$\underline{Y}$: متجه المتغير المعتمد ذو البعد $(n \times 1)$.

$\underline{\mu}$: متجه المتوسط ذات بعد $(n \times 1)$.

σ^2 : معلمة التباين.

v : درجة الحرية (Degree of Freedom).

2. نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهايات الثقيلة: يعد هذا النموذج نموذجاً حيزياً مختلطاً عندما يتم ادراج المتغير المعتمد المتخلف حيزياً كأحد المتغيرات التوضيحية، وإن معلمة التأثير الحيزي على المتغير المعتمد (λ) هي التي تصف قوة الاعتماد الحيزي بين تلك المتغيرات.

وعليه فأن الصيغة الرياضية لنموذج الانحدار الذاتي الحيزي (Spatial Autoregressive Model (SAM) توصف حسب المعادلة الآتية: [1][9][12]

$$\underline{Y} = \lambda W \underline{Y} + X \underline{\theta} + \underline{e} \quad \dots (4)$$

إذ إن:

$\underline{Y}$: متجه متغير الاستجابة ذو البعد $(n \times 1)$.

W : مصفوفة التجاورات الحيزية ذات بعد $(n \times n)$.

λ : معلمة التأثير الحيزي أو ما تسمى معلمة الانحدار الذاتي الحيزي وإن قيمة هذه المعلمة تقع بين $(-1, 1)$ ، إذا كانت $(\lambda = 0)$ هذا يعني لا يوجد ارتباط ذاتي حيزي وأن النموذج يتحول إلى نموذج الانحدار العام وإذا كانت $(\lambda > 0)$ أي إنه هناك ارتباط ذاتي موجب والعكس صحيح.

X : مصفوفة المشاهدات التوضيحية أبعادها $(n \times p + 1)$ وإن p تمثل عدد المتغيرات التوضيحية. $\underline{\theta}$: متجه المعلمات ذات بعد $(p + 1 \times 1)$.

$\underline{e}$: متجه الاخطاء العشوائية ذات بعد $(n \times 1)$ ، ونفترض له توزيع (t) متعدد المتغيرات وتكون دالة كثافة الاحتمال له بالشكل الآتي:

$$f(\underline{e}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\sigma^2 \pi)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}} \left[1 + \frac{1}{v\sigma^2} (\underline{e})^T (\underline{e})\right]^{-\left(\frac{v+n}{2}\right)} \quad \dots (5)$$

وبما إن المتجه $\underline{Y}$ عبارة عن تركيبة خطية بدلالة متجه الخطأ فأن:

$$f(\underline{Y}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\sigma^2 \pi)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}} \left[1 + \frac{1}{v\sigma^2} (\underline{Y} - \lambda \underline{WY} - \underline{X}\underline{\theta})^T (\underline{Y} - \lambda \underline{WY} - \underline{X}\underline{\theta})\right]^{-\left(\frac{v+n}{2}\right)} \quad \dots (6)$$

وبافتراض أن:

$$A = (I - \lambda W)$$

وعليه فأن المعادلة (6) تكون بالشكل الآتي بعد اجراء بعض التبسيطات الرياضية:

$$f(\underline{Y}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right) |A^T A|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\sigma^2 \pi)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}} \left[1 + \frac{1}{v\sigma^2} (\underline{Y} - A^{-1} \underline{X}\underline{\theta})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1} \underline{X}\underline{\theta})\right]^{-\left(\frac{v+n}{2}\right)} \quad \dots (7)$$

المعادلة (7) تمثل دالة كثافة الاحتمال لتوزيع t متعدد المتغيرات وتوصف بالشكل الآتي:

$$\underline{Y} \sim t(A^{-1} \underline{X}\underline{\theta}, \sigma^2 (A^T A)^{-1}, v)$$

3. مصفوفة الاوزان الحيزية: [3][5]: وهي مصفوفة مربعة مبنية على أساس التجاورات وتكون عناصرها قيم موجبة وهنالك عدة مصفوفات للتجاورات منها مصفوفة اوزان التجاور الثنائية والتي ستعتمد في البحث وتنص هذه المصفوفة على أنه إذا كانت i, j متجاورة فإن $w_{ij} = 1$ أما إذا كانت i, j غير متجاورة فإن $w_{ij} = 0$ وتمثل w_{ij} عنصر في مصفوفة الأوزان الحيزية W وكما موضحة في الشكل أدناه:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ neighbor } j \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \dots (8)$$

وهناك تجاورات عدة لبناء مصفوفة الأوزان منها التجاور الملكي (Queen Contiguity) والذي يعرف على أنه تجمع عناصر مصفوفة التجاور (Rook) وعناصر مصفوفة التجاور (Bishop) وعليه فأن مصفوفة الاوزان الحيزية تكون بالشكل الآتي:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (9)$$

4. اختبار الاعتماد الحيزي: توجد هناك اختبارات عدة للكشف عن الاعتماد الحيزي (المكاني) منها اختبار موران والذي يعد من المقاييس المهمة في الكشف عن مدى الارتباط الذاتي بين عناصر

الظاهرة المدروسة فهو يعتمد على نموذج الانحدار الخطي المتعدد العام، إذ يُستعمل معامل الارتباط الذاتي في عمليات قياس تشابه الظواهر المتجاورة، فعندما ترتبط قيم أحد المتغيرات في منطقة ما مع قيم نفس المتغير في منطقة مجاورة فإن ذلك يعني وجود ارتباطاً ذاتياً بين المتغيرين، والمعادلة أدناه تمثل صيغة اختبار موران لقياس الاعتماد الحيزي بين المتغيرات: [3] [8]

$$I = \frac{n (\underline{e}^T w \underline{e})}{s_0 (\underline{e}^T \underline{e})} \quad \dots (10)$$

إذ إن $s_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$ ، وكلما كانت قيمة المعادلة (10) قريبة من الواحد الصحيح معنى ذلك وجود ارتباط ذاتي حيزي بين المشاهدات.

5. اختبار مضاعف لاكرانج لنموذج الانحدار الذاتي الحيزي [1][4]: يعد هذا الاختبار أكثر خصوصياً

من اختبار موران، إذ إن اختبار موران يستعمل لاختبار فيما إذا كان هناك ارتباط ذاتي حيزي بين المشاهدات أم لا من خلال الصيغة المعرفة في المعادلة (10)، أما اختبار مضاعف لاكرانج فإنه يعمل على قياس وتحديد النموذج المناسب للنماذج الحيزية من خلال اختبار للفرضيات الآتية:

$$H_0: \lambda = 0 \quad V.S. \quad H_A: \lambda \neq 0 \quad \dots (11)$$

وإن صيغة الاختبار تكون معرفة بالشكل الآتي:

$$LM_\lambda = \left(\frac{(\underline{e}^T w \underline{Y})}{\frac{\underline{e}^T \underline{e}}{n}} \right)^2 \quad \dots (12)$$

إذ إن:

$$D = \frac{(WX\hat{\beta})^T (I - X(X^T X)^{-1} X) (WX\hat{\beta})}{\frac{\underline{e}^T \underline{e}}{n}} + tr (W^T W + W W)$$

فإذا ما تم رفض فرضية العدم المعرفة بالمعادلة (11) فهذا دليل على عدم وجود اعتماد حيزي، في حين إذ ما تم قبول الفرضية البديلة فهذا يعني وجود الاعتمادية الحيزية بين المشاهدات، عندها يكون النموذج البديل والمناسب هو نموذج الانحدار الذاتي الحيزي.

6. الطريقة الكلاسيكية لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهايات الثقيلة: في هذا المبحث

سيتم تقدير متجه المعلمات (θ) لنموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهايات الثقيلة بطريقة الامكان الأعظم، ونظراً لصعوبة إيجاد المقدّر من خلال المعادلة (7) لذا سيتم اللجوء إلى مفهوم التوزيعات المختلطة وبالصورة الآتية: [1]

$$L(\underline{Y} | S^2, \sigma^2) = \frac{|A^T A|^{\frac{1}{2}}}{(2 \pi S^2 \sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2 S^2 \sigma^2} (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta})} \quad \dots (13)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي لطرفي المعادلة (13) واخذ المشتقة الجزئية الأولى نسبة إلى متجه المعلمات (θ) ومساواتها بالصفر نحصل على مقدرات الامكان الأعظم المشروط بالمتغير العشوائي S^2 وكالاتي:

$$\ln L(\underline{Y}|\underline{S}^2, \sigma^2)$$

$$= \ln |A^T A|^{\frac{1}{2}} - \frac{n}{2} \ln(2 \pi S^2 \sigma^2) - \frac{1}{2 S^2 \sigma^2} (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta})$$

$$\frac{\partial \ln L(\underline{Y}|\underline{S}^2, \sigma^2)}{\partial \underline{\theta}} = -2 X^T A \underline{Y} + 2 X^T X \underline{\theta}$$

$$\hat{\underline{\theta}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y} - \lambda (X^T X)^{-1} X^T W \underline{Y} \quad \dots (14)$$

المعادلة (14) تمثل مقدر الامكان الأعظم لمتجة المعلمات $(\underline{\theta})$. وبنفس الخطوات التي اجريت على $(\hat{\theta})$ فان مقدر المعلمة (σ^2) تكون بالشكل الآتي:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\underline{Y} - A^{-1} X \hat{\underline{\theta}})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1} X \hat{\underline{\theta}})}{n} \cdot \frac{v}{v-2} \quad \dots (15)$$

إذ إن $A = (I - \lambda W)$.

7. الطريقة البيزية لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهايات الثقيلة: يتم في هذا المبحث تقدير معلمات نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ذات النهايات الثقيلة باستعمال المعلومات الأولية التي لها توزيعات احتمالية تنتمي إلى العائلة المتألفة. سيتم تقدير متجه المعلمات $(\underline{\theta})$ عندما تكون (σ^2) معلومة والعكس صحيح.

إن التوزيع السابق لـ $(\underline{\theta})$ المشروط بالمتغير العشوائي (S^2) هو توزيع طبيعي متعدد ويوصف حسب المعادلة الآتية:

$$P(\underline{\theta}|\sigma^2, S^2) \propto e^{-\frac{1}{2 S^2 \sigma^2} (\underline{\theta} - \underline{\theta}_0)^T A_0^{-1} (\underline{\theta} - \underline{\theta}_0)} \quad \dots (16)$$

وإن التوزيع السابق لـ (σ^2) هو توزيع معكوس كما بالمعلمات $(\frac{a_0}{2}, \frac{b_0}{2})$

$$P(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{a_0}{2}+1\right)} e^{-\frac{b_0}{2\sigma^2}} \quad \dots (17)$$

❖ تقدير متجه المعلمات $(\underline{\theta})$ عندما تكون (σ^2) معلومة: بعد دمج معلومات العينة بالمعلومات الأولية حول $(\underline{\theta})$ ، فإن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ $(\underline{\theta})$ المشروط بـ (σ^2, S^2) يتم إيجاده باستعمال المعادلة الآتية:

$$P(\underline{\theta}|\underline{Y}, \sigma^2, S^2) \propto P(\underline{\theta}|\sigma^2, S^2) f(\underline{Y}|\underline{\theta}, \sigma^2, S^2) \quad \dots (18)$$

بعد تعويض دوال المعادلة (18) نحصل على نواة التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ $(\underline{\theta})$ المشروط بـ (σ^2, S^2) وبالصيغة الآتية:

$$P(\underline{\theta}|\underline{Y}, \sigma^2, S^2) \propto e^{-\frac{1}{2 S^2 \sigma^2} [(\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta}) + (\underline{\theta} - \underline{\theta}_0)^T A_0^{-1} (\underline{\theta} - \underline{\theta}_0)]} \quad \dots (19)$$

وبإضافة وطرح المقدار $(A^{-1}X\hat{\theta})$ إلى الشكل التربيعي الخاص بالدالة الاحتمالية $(Y - A^{-1}X\hat{\theta})^T A^T A (Y - A^{-1}X\hat{\theta})$ وإجراء بعض العمليات الرياضية فإن المعادلة (19) تكون معرفة بالشكل الآتي:

$$P(\theta|Y, \sigma^2, S^2) \propto e^{-\frac{1}{2S^2\sigma^2}[(\theta - \theta_0)^T A_0^{-1}(\theta - \theta_0) + (\theta - \hat{\theta})^T X^T X(\theta - \hat{\theta})]} \dots (20)$$

وبمشابهة الشكل التربيعي في المعادلة (20) مع الشكل التربيعي ادناه: [7]

$$\begin{aligned} & (\underline{x} - \underline{a})' \beta (\underline{x} - \underline{a}) + (\underline{x} - \underline{b})' \gamma (\underline{x} - \underline{b}) \\ & = (\underline{x} - \underline{c})' (\beta + \gamma) (\underline{x} - \underline{c}) \\ & + (\underline{a} - \underline{b})' \beta (\beta + \gamma)^{-1} \gamma (\underline{a} - \underline{b}) \dots (21) \end{aligned}$$

إذ إن $\underline{a}$ و $\underline{b}$ و $\underline{c}$ متجهات ذات بعد $(P \times 1)$ و (β, γ) مصفوفتان ذات بعد $(P \times P)$ وكلاهما مصفوفتان أكيدتي الإيجابية، وأن $\underline{c}$ المعرفة في المعادلة (21) تحسب كالآتي:

$$\underline{c} = (\beta + \gamma)^{-1} (\beta \underline{a} + \gamma \underline{b}) \dots (22)$$

بعد ان يتم تشبيه الشكل التربيعي الموجود في المعادلة (20) مع الشكل التربيعي المعروف في المعادلة (21) فإن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (θ) المشروط بـ (σ^2, S^2) يكون كالآتي:

$$\begin{aligned} & P(\theta|Y, \sigma^2, S^2) \\ & = \frac{|A_0^{-1} + X^T X|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi S^2 \sigma^2)^{\frac{P}{2}}} e^{-\frac{1}{2S^2\sigma^2}[(\theta - \hat{\theta}_b)^T (A_0^{-1} + X^T X)(\theta - \hat{\theta}_b)]} \dots (23) \end{aligned}$$

إذ إن:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_b &= \underline{c} = \underline{\theta}_0 \\ & + (A_0^{-1} + X^T X)^{-1} X^T X ((X^T X)^{-1} X^T Y - \lambda (X^T X)^{-1} X^T W Y \\ & - \underline{\theta}_0) \dots (24) \end{aligned}$$

وباستعمال مفهوم نظرية بيز فإن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (θ) يكون بالصيغة الآتية:

$$P(\theta|Y, \sigma^2) = \int_0^\infty P(\theta|Y, \sigma^2, S^2) f(S^2) dS^2 \dots (25)$$

$$\begin{aligned} P(\theta|Y, \sigma^2) &= \frac{\Gamma\left(\frac{v+P}{2}\right) |A_0^{-1} + X^T X|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\sigma^2 \pi)^{\frac{P}{2}} v^{\frac{P}{2}}} \\ & \left[1 + \frac{1}{v\sigma^2} (\theta - \hat{\theta}_b)^T (A_0^{-1} + X^T X) (\theta - \hat{\theta}_b) \right]^{-\left(\frac{v+P}{2}\right)} \dots (26) \end{aligned}$$

إن دالة الكثافة الاحتمالية لـ (θ) المعرفة في المعادلة (26) تمثل توزيع t متعدد المتغيرات وتوصف بالشكل الآتي:

$$\underline{\theta} \sim t_P \left(\hat{\underline{\theta}}_b, \sigma^2 (A_0^{-1} + X^T X)^{-1}, v \right)$$

وعليه فأن المقدّر البيزي لـ $(\underline{\theta})$ هو $(\hat{\underline{\theta}}_b)$ الذي سبق تعريفه في المعادلة (24).

❖ **تقدير المعلمة (σ^2) عندما يكون متجه المعلومات $(\underline{\theta})$ معلوماً:** بعد دمج معلومات العينة بالمعلومات الأولية حول المعلمة (σ^2) ، فإن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (σ^2) المشروط بـ $(\underline{\theta}, S^2)$ يتم إيجاده من خلال المعادلة الآتية:

$$P(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}, S^2) \propto P(\sigma^2) f(\underline{Y} | \underline{\theta}, \sigma^2, S^2) \quad \dots (27)$$

بعد تعويض دوال المعادلة (27) نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (σ^2) المشروط بـ $(S^2, \underline{\theta})$ وبالشكل الآتي:

$$P(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}, S^2) = \frac{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{\frac{a_0+n}{2}} \left(1 + \frac{\phi}{b_0 S^2}\right)^{\frac{a_0+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a_0+n}{2}\right)} (\sigma^2)^{-\left(\frac{a_0+n}{2}+1\right)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[b_0 + \frac{\phi}{S^2}\right]} \quad \dots (28)$$

إذ إن:

$$\phi = (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1} X \underline{\theta}) \quad \dots (29)$$

إذ إن المعادلة (28) تمثل توزيع معكوس كاما بالمعلومات $\left(\frac{a_0+n}{2}, \frac{b_0+\phi/S^2}{2}\right)$ ، وباستخدام مفهوم نظرية بيز فأن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (σ^2) يكون كالآتي:

$$P(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}) = \int_0^\infty P(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}, S^2) f(S^2) dS^2 \quad \dots (30)$$

$$P(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}) = \frac{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{\frac{a_0+n}{2}} \left(\frac{v}{2}\right)^{v/2}}{\Gamma\left(\frac{a_0+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} (\sigma^2)^{-\left(\frac{a_0+n}{2}+1\right)} e^{-\frac{b_0}{2\sigma^2}} \sum_{r=0}^{\frac{a_0+n}{2}} \left(\frac{a_0+n}{2}\right)^r \left(\frac{\phi}{b_0}\right)^r \int_0^\infty S^{2-\left(\frac{v}{2}+r\right)-1} e^{-\frac{1}{2S^2}\left(v+\frac{\phi}{\sigma^2}\right)} dS^2 \quad \dots (31)$$

وبعد إجراء التكامل للمعادلة (31) نسبة للمتغير العشوائي (S^2) نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (σ^2) .

$$P(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}) = \frac{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{\frac{a_0+n}{2}} \left(\frac{v}{2}\right)^{v/2} \Gamma\left(\frac{v+2r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_0+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left(\frac{v+\frac{\phi}{\sigma^2}}{2}\right)^{\frac{v+2r}{2}}}$$

$$(\sigma^2)^{-\left(\frac{a_0+n}{2}+1\right)} e^{-\frac{b_0}{2\sigma^2}} \sum_{r=0}^{\frac{a_0+n}{2}} \binom{\frac{a_0+n}{2}}{r} \left(\frac{\phi}{b_0}\right)^r \quad \dots (32)$$

نلاحظ من المعادلة (32) بأن التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (σ^2) هو توزيع احتمالي غير شائع ولكنه توزيع فعلي أي له شروط دالة الكثافة الاحتمالية وعلية فان مقدر بيز لـ (σ^2) يتم ايجاده من خلال العلاقة الآتية:

$$E(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}) = E_{S^2} E_{\sigma^2}(\sigma^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}, S^2)$$

$$= \frac{1}{a_0 + n - 2} \left[(\underline{Y} - A^{-1}X\underline{\theta})^T A^T A (\underline{Y} - A^{-1}X\underline{\theta}) + b_0 \right] = \hat{\sigma}_b^2 \quad \dots (33)$$

8. خوارزمية سرب الطيور [13]: تمثل الخوارزميات التطورية (Evolutionary Algorithms (EA)) أساليب بحث عشوائية مستوحاة من الطبيعة والتي تحاكي التطور البيولوجي الطبيعي أو السلوك الاجتماعي للأنواع.

ومن هذه الخوارزميات خوارزمية أمثلة سرب الطيور Particle Swarm Optimization (PSO) المقترحة من قبل (Edward and Kennedy) في عام (1995) والمستوحاة من السلوك الاجتماعي لحيوانات مثل سرب الطيور أو مجاميع الأسماك. وعلى نحو عام تعد الخوارزميات التطورية خوارزميات بحث عشوائية تؤدي مهام التعلم مع القدرة على التطور وتمتلك ثلاث خصائص أساسية هي:

- 1. المجتمع Population:** تحافظ الخوارزميات التطورية على مجموعة الحلول التي تدعى بالمجتمع لغرض حل المسألة قيد الدراسة، إذ يعد المجتمع من المبادئ الأساسية في العملية التطورية (Evolution Process). ويمكن الإشارة إلى أن المجتمع هو مجموعة من المواقع للطيور أو الأسماك والتي تمثل حلولاً للمسألة المراد حلها.
- 2. موجة اللياقة Fitness Oriented:** إن أي حل في المجتمع يدعى بالفرد، وكل فرد يمتلك تمثيلاً جينياً يدعى بالشفرة، كما إن تقييم الأداء يدعى بقيمة اللياقة (Fitness Value) وعلى نحو عام تفضل الخوارزميات التطورية الأفراد الأكثر ملاءمة إذ يعد هذا الاختيار أساس الأمثلة والتقارب للخوارزميات، ويمكن القول بأن دالة اللياقة أو دالة الهدف هي الدالة التي تمثل المسألة المراد حلها.
- 3. الموجة التغيري Variation Driven:** يخضع الأفراد إلى عدد من العمليات المتباينة التي تؤدي إلى تغيير خصائص الفرد ومكوناته التي تمثل أساس البحث في فضاء الحل. وهي سرعة الجسيمات أو الطيور أو الأسماك في آلية عمل الخوارزمية.

إن خوارزمية أمثلة سرب الطيور (PSO) هي خوارزمية بحث مبنية على المجتمع وتبتدئ بمجتمع من الحلول العشوائية تسمى العناصر وبخلاف التقنيات الأخرى لحسابات التطور البيولوجي أذ إن كل عنصر في الخوارزمية ترافقه سرعة تتغير آلياً طبقاً لتصرفين الأول هو التصرف الماضي للعنصر والثاني هو تصرف الأفراد المجاورين في فضاء البحث لذلك فالعنصر له نزعة لأن يطير بالاتجاه الأفضل ثم الأفضل في فضاء البحث أثناء سير عملية البحث بغية الوصول إلى الحل الأمثل. وقد صممت خوارزمية أمثلة سرب الطيور بداية لمحاكاة بحث الطيور عن الطعام.

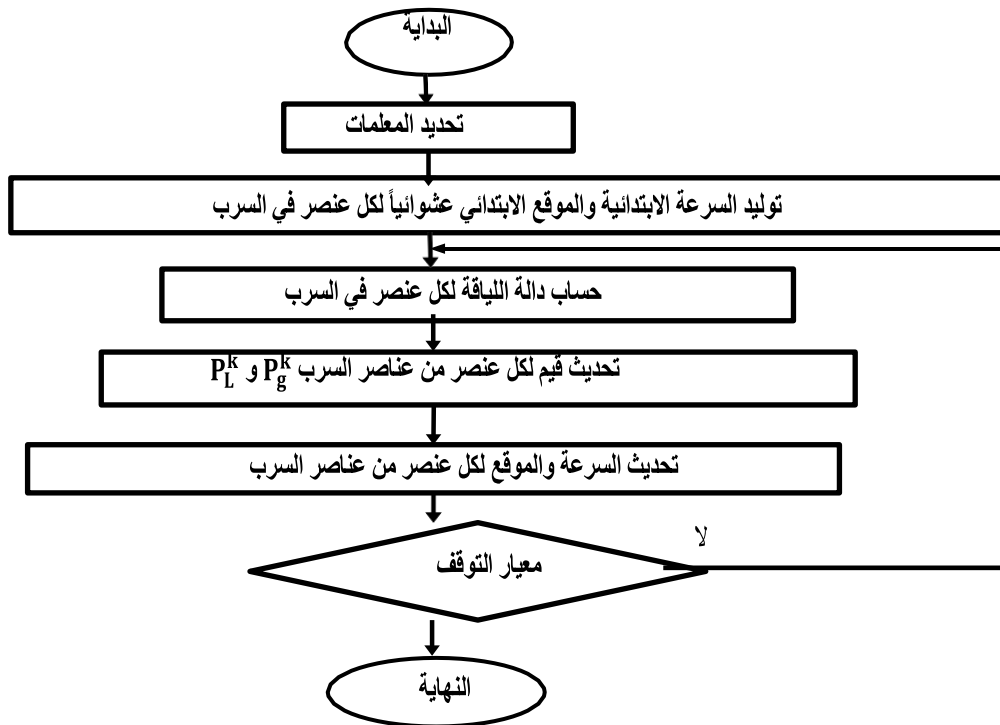
بصورة عامة تستطيع خوارزمية أمثلة سرب الطيور تصغير أية دالة $f(x)$ إذ إن (x) تمثل متجه في فضاء متعدد الأبعاد وعموماً فإن سرعة العنصر (k) وموقعة في السرب يتم حسابها بواسطة المعادلة الآتية:

$$V_{i+1}^k = we * V_i^k + c_1 * r_1 (P_L^k - x_i^k) + c_2 * r_2 (P_g^k - x_i^k) \quad \dots (34)$$

مع المعادلة الآتية:

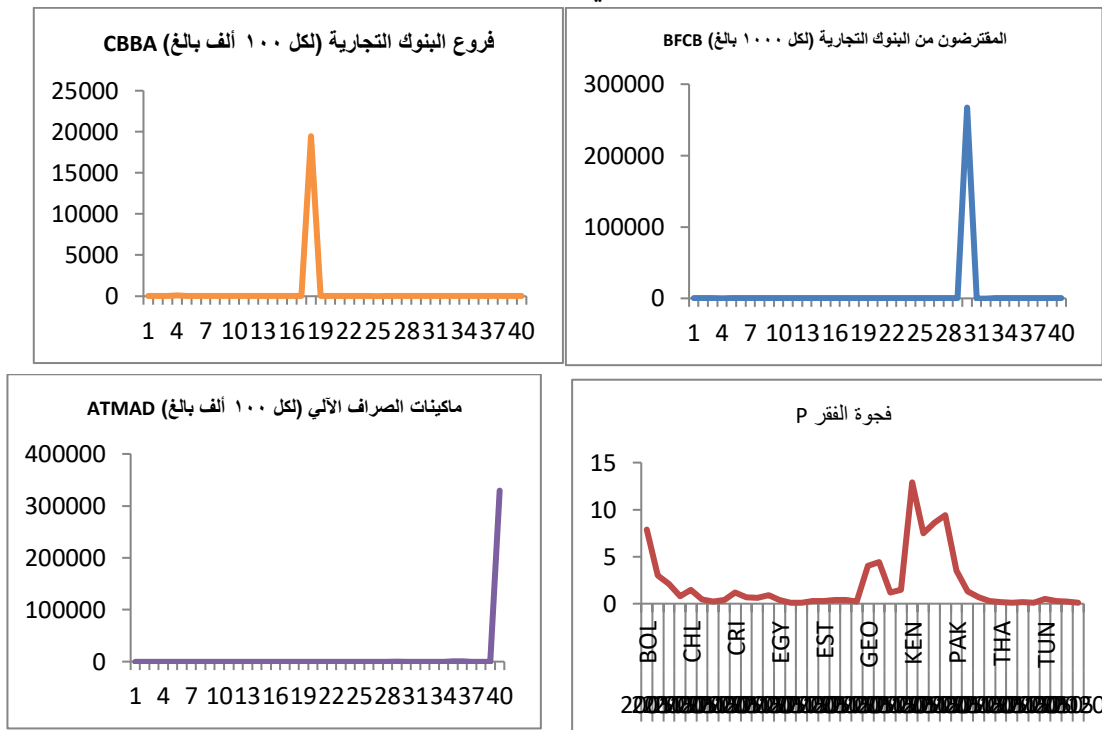
$$x_{i+1}^k = x_i^k + V_{i+1}^k \quad \dots (35)$$

إذ إن (we) تمثل الممانعة لتغير السرعة السابقة و (V_i^k) تمثل السرعة للعنصر (k) في التكرار (i) ، و (P_L^k) وتمثل أفضل موقع محلي زاره العنصر (k) ويمثل (P_g^k) أفضل موقع تم إيجاده من بين المواقع المحلية. كما إن (c_1) و (c_2) يمثلان معاملات مكون الإدراك ومكون المجتمع على التوالي و (r_1) و (r_2) يمثلان قيم عشوائية تتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$ ، كما أن (x_i^k) تمثل الموقع للعنصر (k) في التكرار (i) . وفيما يأتي مخطط يمثل عمل خوارزمية سرب الطيور.



شكل (1): مخطط يوضح عمل خوارزمية سرب الطيور

9. الجانب التطبيقي: في هذا المبحث سيتم تحليل أثر بعض مؤشرات الشمول المالي على عينة الفقر في الدول النامية والمتمثلة بالدول (بوليفيا (BOL)- شيلي (CHL) – كوستاريكا (CRL)- جمهورية مصر العربية (EGY) – استونيا (EST)- جورجيا (GEO)- كينيا (KEN)- باكستان (PAK)- تايلند (THA)- تونس (TUN)) وللسنوات (2005-2010-2015-2020)، إذا تمثل بيانات البحث عينة الفقر في الدول النامية كمتغير استجابة والمؤشرات (المقترضون من البنوك التجارية لكل 1000 بالغ (BFCB) وماكينات الصراف الآلي لكل 100 ألف بالغ (ATMAD) وفروع البنوك التجارية لكل 100 ألف بالغ (CBBA)) كمتغيرات توضيحية. والشكل أدناه يوضح سلوك عينة فجوة الفقر للدول النامية فضلاً عن مؤشرات الشمول المالي: [2]



شكل (2): سلوك فجوة الفقر في الدول النامية فضلاً عن مؤشرات الشمول المالي للسنوات (2005-2010-2015-2020).

قبل عملية التحليل لابد من معرفة فيما إذا كانت البيانات تتبع توزيع (t) ومن خلال اختبار حسن المطابقة والمتمثل باختبار مربع كاي نلاحظ بان القيمة المحسوبة لمتغير عينة الفقر في الدول النامية كانت مساوية إلى (3.1023) وهي أصغر من القيمة الجدولية (3.841) مما يدل على قبول فرضية عدم القائلة بان البيانات تتبع توزيع t.

ولمعرفة إذا كان هنالك ارتباط ذاتي حيزي لمتغير فجوة الفقر تم استعمال اختبار موران المعروف في المعادلة (10) وباعتماد على مصفوفة الأوزان الحيزية المعرفة في المعادلة (9) ومن خلال برنامج الـ MATLAB R2016a وكما في الجدول أدناه:

جدول (1): قيمة اختبار موران

الاختبار	مصفوفة الاوزان الحيزية (W)
موران	0.9249

من خلال الجدول رقم (1) نلاحظ بأن قيمة اختبار موران كانت قريبة من الواحد الصحيح مما يدل على وجود ارتباط ذاتي حيزي وللتأكد تم استعمال اختبار مضاعف لاكرانج من خلال اختبار الفرضية المعرفة في المعادلة (11) وباستعمال الصيغة المعرفة في المعادلة (12) فإن قيمة اختبار مضاعف لاكرانج يكون كما في الجدول الآتي:

جدول (2): قيمة اختبار مضاعف لاكرانج

الاختبار	مصفوفة الاوزان الحيزية (W)
لاكرانج	6.6452

وبعد مقارنة قيمة اختبار مضاعف لاكرانج في الجدول رقم (2) مع القيمة الجدولية لاختبار مربع كاي تحت مستوى معنوية (0.05) فإن القيمة الجدولية (3.841)، ومن خلال القيمة الجدولية نلاحظ بأن قيمة اختبار مضاعف لاكرانج أكبر من الجدولية مما يدل على قبول الفرضية البديلة والتي نصت على أن قيمة معلمة التأثير الحيزي تكون غير صفرية أي بمعنى هنالك ارتباط ذاتي حيزي بين المشاهدات.

والجدول أدناه يبين تقدير معلمات نموذج الانحدار الذاتي الحيزي للخطأ العشوائي ذات النهاية الثقيلة بالطريقة البيزية عند استعمال معلومات أولية خبرية وخوارزمية سرب الطيور بعد قيم معلمات الطريقة التقليدية كقيمة أولية للخوارزمية وعدد محدد من التكرارات نحصل على الآتي.

جدول (3): مقدرات متجه معلمات نموذج الانحدار الذاتي الحيزي

النموذج	الطريقة البيزية عند استعمال معلومات أولية متوفرة $\hat{\theta}_b$	خوارزمية سرب الطيور $\hat{\theta}_{ps}$
Constant	2.8799	2.6649
X ₁	-4.85604E-03	- 3.68541E-03
X ₂	-0.0167	-0.0182
X ₃	-4.07707E-02	-5.45213E-02
λ	0.7281	0.8652

ومن الجدول رقم (3) تبين بأن قيمة معلمة التأثير الحيزي تكون أعلى عند استعمال خوارزمية سرب الطيور مقارنة بالطريقة البيزية، والجدول رقم (4) يبين معيار متوسط مربعات الخطأ لمقدر معلمة التباين لخوارزمية سرب الطيور والطريقة البيزية.

جدول (4): قيم معيار متوسط مربعات الخطأ لمعلمة التباين لنموذج الانحدار الذاتي الحيزي

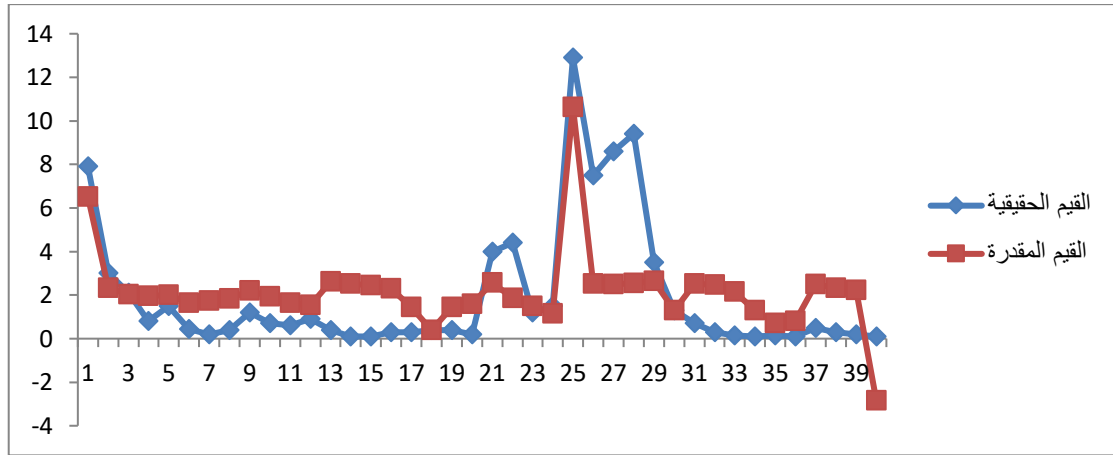
	الطريقة البيزية	خوارزمية سرب الطيور
$\hat{\sigma}^2$	1.1254	0.8542
معيار متوسط مربعات الخطأ	10.0725	14.6521

من الجدول رقم (4) نلاحظ انخفاض قيمة معيار متوسط مربعات الخطأ لمقدر معلمة التباين بالنسبة للطريقة البيزية، والجدول الآتي يوضح قيم معياري متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي (MAPE) لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي.

جدول (5): معايير المقارنة للطرق المستعملة لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي

المعيار	الطريقة البيزية	خوارزمية سرب الطيور
متوسط مربعات الخطأ	9.2350	5.1462
متوسط الخطأ النسبي	1.3252	0.9974

نلاحظ من الجدول رقم (5) تفوق خوارزمية سرب الطيور على الطريقة البيزية لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي لامتلاكها أقل قيم للمعيارين متوسط مربعات الخطأ ومتوسط الخطأ النسبي. والشكل الآتي يوضح سلوك قيم متغير الفقر لعينة الدول النامية والقيم التقديرية بالاعتماد على أفضل طريقة والمتمثلة بخوارزمية سرب الطيور.



شكل (3): سلوك القيم الحقيقية والتقديرية لعينة الفقر في الدول النامية للسنوات (2005-2010-2015-2020)

نلاحظ من الشكل رقم (2) بأن سلوك البيانات المقدرة لها نفس سلوك البيانات الحقيقية وهذا يدل على أن النموذج المقدر كان ملائماً لبيانات الدراسة. **الاستنتاجات والتوصيات:** من خلال الدراسة النظرية والتطبيقية تم التوصل إلى أهم الاستنتاجات منها:

1. مقدر متجه معاملات نموذج الانحدار الذاتي الحيزي عندما يتبع الخطأ توزيع t المتعدد والمعروف في المعادلة (14) هو نفس المقدر لمتجه معاملات نموذج الانحدار الذاتي الحيزي عندما يتبع الخطأ التوزيع الطبيعي المتعدد.
2. التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ θ يتبع توزيع t متعدد المتغيرات وكان التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ σ^2 غير شائع إلا أنه كان توزيعاً ملائماً.
3. قيمة معلمة التأثير الحيزي (λ) كانت أعلى عند استعمال خوارزمية سرب الطيور مقارنة بالطريقة البيزية بمعنى وجود ارتباط ذاتي موجب بين المشاهدات.
4. تفوق الطريقة البيزية عند توفر معلومات أولية خبرية عند تقدير معلمة التباين لنموذج الانحدار الذاتي الحيزي على خوارزمية سرب الطيور بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ.
5. تفوق خوارزمية سرب الطيور عند تقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي على الطريقة البيزية عند توفر معلومات أولية خبرية من خلال معياري متوسط مربعات الخطأ ومتوسط الخطأ النسبي.

واستناداً إلى مبحث الاستنتاجات يوصي الباحثين باستعمال أسلوب بيز عندما تكون المعلومات الأولية غير متوفرة وخوارزميات تطويرية أخرى لتقدير نموذج الانحدار الذاتي الحيزي عندما يكون حد الخطأ حيزياً وغير طبيعياً واستعمال عدة مصفوفات أوزان حيزية.

المصادر

اولاً. المصادر العربية:

1. ابو الشعير، محمود جواد والصراف، نزار مصطفى، (2018)، الانحدار الخطي: رؤى من القاعدة الى القمة. مطبعة عبدالسلام، الطبعة الاولى، كلية الرادين الجامعة، العراق.
2. الخطاب، اوس علي (2024). قياس وتحليل اثر بعض مؤشرات الشمول المالي على الفقر عينة من الدول النامية انموذجاً للمدة 2005-2020. مجلة الريادة للمال والاعمال، (1)5، 174-184.
3. علي، عمر عبدالمحسن وهادي، سوسن قاسم، (2014)، تقدير نماذج الانحدار الحيزي لنسب الفقر في اقضية العراق للعام 2012. مجلة العلوم الاقتصادية والادارية، (79)20، 337-351.

ثانياً. المصادر الأجنبية:

1. Anselin, L., (2001), Spatial Econometrics. in Baltagi B.H. (ed), A companion to Theoretical Econometrics, Blackwell publisher, Oxford, (310- 330).
2. Basile, R., (2011), Some notes on spatial statistics and spatial econometrics. second university of naples, capua, rome.
3. Bechmann, A. L. C. F., (2016), Estimating an Inverse Gamma distribution. *stat*, arXiv:1605.01019v2.
4. Box, G. P. & Tiao, G. C., (1973), Bayesian Inference in Statistical Analysis. Addison Wesley publishing company, Inc. London, U.K.
5. Gan, J., (2009), Spatial Combination Interpolation model based on panal data and its empirical study. school of management, Fuzhou university (or Fujian institute of economics and management) Fuzhou 350002, china.
6. Hao, Q., (2008), Review on Spatial Econometric Analysis. School of Management, Tianjin University, Tianjin, 300072, China.
7. Kibria, B. M. G & Joarder, A. H., (2006), Short Review of Multivariate *t*-Distribution. *Journal of Statistical Research*, 40(1), 59-72.
8. Lesage, J. P., (2004), Lecture 1: Maximum Likelihood estimation of spatial regression model. University of Toledo.
9. Paraguas, F. & Anton, (2005), Spatial Econometrics Modeling of Poverty. proceedings of the 8th WSEAS international conference on applied mathematics, Tenerife, Spain, 159-164.
10. Satapath, S.C. Murthy, J.V.R. & Reddy, P.V.G.D., (2009), Particle swarm optimized multiple regression linear model for data classification. *Journal of Applied Soft Computing*, 9(2), 470-476.