



**Tikrit Journal of Administrative
and Economics Sciences**

مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية

EISSN: 3006-9149

PISSN: 1813-1719



**A Comparison Between Some Robust Estimation Methods for
Estimating a Two-Dimensional Nonlinear Regression Model**

Awat Sirdar Wahdi*

College of Administration and Economics/Salahaddin University

Keywords:

Signed-Rank Estimator, Robust M-estimation, Least Absolute Deviations Method, Chirp Signal Model.

ARTICLE INFO

Article history:

Received	11 Sep. 2025
Received in revised form	17 Sep. 2025
Accepted	17 Sep. 2025
Available online	30 Sep. 2026

© THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER
THE CC BY LICENSE

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



***Corresponding author:**

Awat Sirdar Wahdi

College of Administration and
Economics/Salahaddin University



Abstract: In this research, it is proposed to employ the Signed-Rank Estimator method, the Least Absolute Deviations method, and the Robust M-estimation method to estimate the parameters of one of the nonlinear regression models, namely the two-dimensional Chirp-Signal model. This model is considered one of the complex regression models commonly used in representing two-dimensional signals as well as in modeling grayscale images. To achieve this, the simulation approach was applied to generate data, followed by a comparison between the estimation methods using the statistical criterion of Mean Squared Error (MSE) for different sample sizes and parameter settings. The findings revealed that the Least Absolute Deviations method ranked first in terms of efficiency, followed by the Signed-Rank Estimator method in second place, and the Robust M-estimation method in third place for estimating the parameters of the two-dimensional Chirp Signal model.

مقارنة بين بعض طرائق التقدير الحصينة لتقدير انحدار غير خطي ذي البعدين

آوات سردار وادي

كلية الإدارة والاقتصاد/جامعة صلاح الدين

المستخلص

تم في هذا البحث اقتراح توظيف كل من طريقة مقدر رتبة الإشارة وطريقة الانحرافات المطلقة الصغرى وطريقة M الحصينة لتقدير معلمات أحد نماذج الانحدار غير الخطية وهو انموذج Chirp Signal ذي البعدين الذي يعد أحد نماذج الانحدار المعقدة الشائع الاستخدام في تمثيل الاشارات ذات البعدين وكذلك نمذجة الصور الرمادية. ولتحقيق ذلك تم استخدام أسلوب المحاكاة لتوليد البيانات ومن ثم المقارنة بين طرائق التقدير باستخدام المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ ((Mean Squared Error (MSE) لحجوم عينات ونماذج مختلفة لقيم المعلمات الافتراضية. وتم التوصل من خلال ذلك أن طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى تأتي بالمرتبة الأولى من حيث الأفضلية وطريقة مقدر رتبة الإشارة بالمرتبة الثانية وطريقة M الحصينة بالمرتبة الثالثة في تقدير معلمات وانموذج Chirp Signal ذي البعدين.

الكلمات المفتاحية: مقدر رتبة الإشارة، طريقة M الحصينة، طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى، انموذج Chirp Signal.

1. المقدمة:

سوف يتم في هذا البحث استخدام أحد نماذج الانحدار غير الخطية وهو انموذج Chirp Signal ذي البعدين وهو أحد نماذج الانحدار المعقدة الشائع الاستخدام في تمثيل الاشارات ذات البعدين وكذلك نمذجة الصور الرمادية، إذ يتم تطبيق النماذج ثنائية البعد في العديد من مجالات معالجة الصور، على سبيل المثال، في نمذجة وتحليل الصور الرمادية وصور الملمس، والتصوير بالرنين المغناطيسي (MRI)، والتصوير البصري، وما إلى ذلك. فضلاً عن تطبيقات هذه النماذج في معالجة الصور، ويمكن أيضاً ملاحظة هذه الإشارات في أجهزة الرادار والسونار والاتصالات المتنقلة وأنظمة المراقبة، أما الصيغة الرياضية لأنموذج Chirp Signal ذي البعدين فتعطي وفق الصيغة الآتية:

$$y(m, n) = \sum_{k=1}^p \{A_k \cos(\alpha_k m + \beta_k m^2 + \eta_k n + \delta_k n^2) + B_k \sin(\alpha_k m + \beta_k m^2 + \eta_k n + \delta_k n^2)\} + X(m, n) \dots (1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

إذ إن:

A_k, B_k : هي قيم محددة غير صفرية تمثل معلمات السعة.

α_k, η_k : تمثل معلمات الترددات.

β_k, δ_k : تمثل معلمات معدلات التردد.

وإن قيم كل من الترددات ومعدلات التردد تقع بين 0 و π .

وإن $X(m, n)$: هو حد الخطأ العشوائي التجميعي.

الذي يتم التعبير عنه كالآتي:

$$X(m, n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(j, k) \varepsilon(m - j, n - k) \quad \dots(2)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(j, k) < \infty \quad \dots(3)$$

$\varepsilon(m, n)$: هي متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع (i.i.d) بمتوسط 0 وتباين σ^2 . علماً أن حجم العينة هو MN . يتم تطبيق النماذج ثنائية البعد في العديد من المجالات كما تم ذكره أعلاه ويمكن دراسة هذه التطبيقات من خلال الرجوع إلى المصادر:

(Francos et al.,1998, Francos et al.,2002, Simeunović et al.,2015, Zhang et al.,2008)

ويُعد تقدير المعلمات المجهولة لهذه الإشارات من المسائل المهمة والصعبة في نفس الوقت كون هذا الانموذج أحد نماذج الانحدار غير الخطية المعقدة، ولكن على الرغم من ذلك قام العديد من الباحثين بدراسة تقنيات التقدير لمعلمات هذا الانموذج والعديد من نماذج الاشارة الأخرى باستخدام طريقة المربعات الصغرى وبعض الخوارزميات التي تميزت في كفاءتها في التقدير ولكنها تستخدم ضمن شروط محددة وهي عدم وجود قيم شاذة في البيانات وكذلك يجب أن يكون توزيع الخطأ هو التوزيع الطبيعي، ولمعرفة تفاصيل هذه الطرائق والخوارزميات يمكن الرجوع إلى المصادر: (Peleg et al.,2002, Friedlander et al.,1996, Lahiri.,2013)، وكذلك المصادر المذكورة في هذه البحوث. أما لمعرفة الطرائق الاعتيادية غير الحصرية المستخدمة لتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي البعدين فيمكن الرجوع إلى المراجع الآتية:

قام الباحث Lahiri et al., 2011 باستخدام طريقة المربعات الصغرى Least Square Method لتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي المتغيرين، وأثبت أن المقدرات بهذه الطريقة تتصف بخاصية الاتساق وحصل على التوزيع التقاربي. ولمعرفة سلوك هذه الطريقة في تقدير المعلمات قام الباحث باستخدام أسلوب المحاكاة. ودراسة عدد من التجارب، وتوصل إلى أفضلية هذه الطريقة في تقدير المعلمات.

قام الباحث Lahiri et al., 2013 باقتراح طريقة كفاءة لتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي المتغيرين، وذلك عندما يكون الخطأ مستقر، وكذلك بين الباحث كيفية الحصول على المقدرات البدائية للمعلمات. واستخدم أسلوب المحاكاة، وقام بإجراء عدد من التجارب لمعرفة كفاءة الطريقة المقترحة، وتوصل إلى أن هذه المقدرات لها نتائج كفاءة.

اقترح الباحث Grover, 2018 استخدام طريقة المربعات الصغرى التقريبية لتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي المتغيرين عندما يكون عدد المركبات ($P=1$) وأثبت خاصية الاتساق لهذه المقدرات. وكذلك اقترح طريقة متسلسلة لتقدير المعلمات عندما يكون عدد مركبات الإشارة أكبر من واحد، وذلك عندما تكون P معلومة. واستخدم أسلوب المحاكاة لمعرفة أفضلية الطريقة المقترحة. قدم الباحث Shukla et al., 2023 خوارزمية عالية الكفاءة حسابياً لتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي البعدين، مع إثبات الخصائص النظرية التقريبية للمقدرات المقترحة. وتستند الخوارزمية المقترحة إلى حقيقة أن نموذج Chirp Signal ذي المتغيرين الذي يحتوي على خمسة معلمات لا خطية، يمكن النظر إليه على أنه مجموعة من نماذج الإشارة Chirp Signal أحادية

البعد، الذي يحتوي كل منها على معلمتين لا خطيتين فقط، وبالتالي يمكن تقليل التعقيد الحسابي في تقدير معلمات نماذج Chirp Signal ثنائية البعد.

قام الباحث Kundu, 2023 بتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي البعدين باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة واستخدم أسلوب المحاكاة لمعرفة أفضلية التقدير وفق هذه الطريقة.

وقام Kundu et al., 2024 بتقدير معلمات انموذج chirp like mode ذي البعد الواحد وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة ومقارنتها مع طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى وذلك باستخدام أسلوب المحاكاة.

ولكن على الرغم من كفاءة طرائق التقدير الاعتيادية غير الحصينة التي تم استخدامها من قبل الباحثين تحت الظروف المثالية (أي عدم وجود قيم شاذة وتوزيع طبيعي للخطأ)، فإن أدائها يتدهور بشدة في وجود قيم شاذة أو عندما يتبع الخطأ توزيعاً ثقليل الذيل مثل توزيع كوشي، لذلك قمنا في هذا البحث باقتراح توظيف ثلاث طرائق حصينة لتقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي البعدين هذا النموذج وهي طريقة مقدر رتبة الإشارة (Signed Rank Estimator Method (SR)) وطريقة الانحرافات المطلقة الصغرى (Least Absolute Deferential (LAD)) وطريقة M الحصينة (Robust M Method).

2. طرائق التقدير الحصينة Robust Estimation Methods: تعد مقدرات المربعات الصغرى

للمعلمات في انموذج Chirp Signal ذي البعدين المعطى في الصيغة (1) أكثر كفاءة من غيرها ولكن أفضلية هذه الطريقة تتدهور بشكل كبير عند وجود القيم الشاذة، أو عندما يكون توزيع الخطأ ثقليل الذيل، ومن الأنسب في هذه الحالات استخدام نهج الحصانة في التقدير، لذلك قمنا في هذا البحث باقتراح توظيف كل من طريقة مقدر رتبة الإشارة وطريقة الانحرافات المطلقة الصغرى وطريقة M الحصينة لغرض تقدير معلمات انموذج Chirp Signal ذي البعدين:

1-2. طريقة مقدر رتبة الإشارة (Signed-Rank Estimator Method): لغرض تقدير معلمات انموذج الانحدار غير الخطي متعدد الأبعاد باستخدام مقدر رتبة الإشارة المعمم اقترح (Nguelifack et al., 2015: PP.217,218) الصيغة الآتية:

$$D_n(\theta) = \frac{1}{|n|} \sum_{t \leq n} a_n(t) \rho(|Z(\theta)|_{(t)}) \quad \dots \quad (4)$$

إذ يعرف مقدر رتبة الإشارة لانموذج الانحدار غير الخطي متعدد الأبعاد لمتجه المعلمات θ بأنه أي متجه $\tilde{\theta}$ الذي يجعل $D_n(\theta)$ أقل ما يمكن:
إذ إن:

$$Z_t(\theta) = y_t - f(X_t, \theta)$$

وإن:

$$|Z(\theta)|_{(t)} \text{ هي قيمة الرتبة } t^{\text{th}} \text{ من بين } |Z_1(\theta)|, \dots, |Z_n(\theta)|.$$

$\rho: R^+ \rightarrow R^+$ هي دالة مستمرة ومحدبة ومتزايدة.

$a_n(t)$: هي دالة (Scores generated) وصيغتها هي:

$$a_n(t) = \varphi^+ \left(\frac{|t|}{|n|+1} \right)$$

لبعض الدوال المحددة غير المتناقصة:

$$\varphi^+ : (0,1) \rightarrow R^+$$

علماً أنه يمكن الحصول على مقدار رتبة الإشارة بالتعويض من خلال الصيغة (4) أعلاه، ولكن بعد التعويض عن كل من:

$$\rho(t) = t$$

$$\varphi^+(u) = u$$

ويمكن إعادة كتابة الصيغة (4) كالآتي [Nguelifack et al., 2015: PP. 218]:

$$D_n(\theta) = \frac{1}{|n|} \sum_{t \leq n} a_n(R(|Z_t(\theta)|)) \rho(|Z_t(\theta)|) \quad \dots (5)$$

إذ إن:

$|Z_t(\theta)|$ هو الرتبة (Rank) لقيم $|Z_t(\theta)|$ التي يتم إيجادها لكافة البواقي البالغ عددها $|n|$.
ويتم الحصول على مقدار رتبة الإشارة المعمم لمتجه الملمات θ وذلك بجعل $D_n(\theta)$ في الصيغة (5) أقل ما يمكن ولكن بعد التعويض عن $[\varphi^+(u) = 1, \rho(t) = t^2]$.
ويتم الحصول على مقدار الانحرافات المطلقة الصغرى لمتجه الملمات θ وذلك بجعل $D_n(\theta)$ أقل ما يمكن ولكن بعد التعويض عن $[\varphi^+(u) = 1, \rho(t) = t]$. ولغرض تقدير ملمات انموذج Chirp Signal ذي البعدين ذي الصيغة (1) وفق طريقة مقدار رتبة الإشارة، وعندما تكون عدد مركبات الإشارة (P=1) نتبع ما يأتي:
يتم إيجاد البواقي من خلال الصيغة الآتية:

$$X(m, n) = y(m, n) - A_1 \cos(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) - B_1 \sin(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) \quad \dots (6)$$

ومن ثم يتم إعادة كتابتها بشكل متجه عمودي يرمز له e_i كالآتي:

$$e_i = X(m, n) = \{X(1,1), \dots, X(1, N), X(2,1), \dots, X(2, N), X(M,1), \dots, X(M, N)\}^T \quad \dots (7)$$

وعليه يمكن إعادة كتابة المعيار المستعمل في إيجاد مقدار رتبة الإشارة المعمم (GSR) في الصيغة (5) بالشكل الآتي:

$$D_{nSR}(\theta) = \sum_{i=1}^{MN} \frac{R(|e_i|)|e_i|}{(|n|)(|n|+1)} \quad \dots (8)$$

إذ إن:

$$R(|e_i|): \text{تمثل رتبة الأخطاء } (|e_i|) \text{ من بين } (|e_1|, |e_2|, \dots, |e_{MN}|).$$

$|e_i|$: تمثل القيمة المطلقة للخطأ.

$|n|$: تمثل العدد الكلي للملاحظات الناتجة من حاصل ضرب عدد الصفوف M في عدد الأعمدة N .
ومن خلال جعل D_{nSR} أقل ما يمكن نحصل على مقدرات رتبة الإشارة للمعاملات $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \delta_1$.

*** طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى (Least Absolute Deviations Method(LAD))**
يتم الحصول على تقدير المعاملات بطريقة الانحرافات المطلقة الصغرى كحالة خاصة من مقدر رتبة الإشارة المعمم ذي الصيغة (8) أعلاه، من خلال جعل $D_{nLAD}(\theta)$ في المعادلة الآتية أقل ما يمكن:

$$D_{nLAD}(\theta) = \sum_{i=1}^{MN} \frac{|e_i|}{|n|} \dots (9)$$

وبعد تحقق ذلك نحصل على مقدرات الانحرافات المطلقة الصغرى للمعاملات $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \delta_1$.

2-2 طريقة M الحصينة: (Robust M-Method)

يمكن إيجاد مقدر M الحصين لمتجه المعاملات θ لانموذج الانحدار غير الخطي متعدد الأبعاد باستخدام الصيغة الآتية [Mitra et al.,2011: PP.2798]:

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmin} Q(\theta) \dots (10);$$

$$Q(\theta) = \sum_{t \leq n} \rho \left(\frac{y_t - f(x_t, \theta)}{\hat{\sigma}} \right)$$

إذ إن:

$\rho(\cdot)$: هي دالة محدبة ومتماثلة. (Convex and Symmetric function).

ولغرض تقدير معاملات انموذج Chirp Signal ذي البعدين وفق طريقة M الحصينة يتم استخدام الصيغة الآتية:

$$Q(\theta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho \left(\frac{y(m,n) - A_1 \cos(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) - B_1 \sin(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2)}{\hat{\sigma}} \right) \dots (11)$$

وإن $\hat{\sigma}$ يتم إيجادها من خلال الصيغة الآتية:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0.6745} [\operatorname{med} | (X(m, n) - \operatorname{med}(X(m, n))) |] \dots (12)$$

إذ إن:

$$X(m, n) = [X(1,1), \dots, X(1, N), X(2,1), \dots, X(2, N), \dots, X(M,1), \dots, X(M, N)]^T$$

وتكون ψ كما يأتي:

$$\Psi\left(\frac{y_t - f(x_t, \theta)}{\hat{\sigma}}\right) = \Psi\left(\frac{y(m, n) - A_1 \cos(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) - B_1 \sin(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2)}{\hat{\sigma}}\right) \dots (13)$$

اما الأوزان W_t في المعادلة فتكون كالآتي:

$$W_t = W(m, n) = \frac{\Psi\left((y(m, n) - A_1 \cos(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) - B_1 \sin(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2))/\hat{\sigma}\right)}{(y(m, n) - A_1 \cos(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) - B_1 \sin(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2))/\hat{\sigma}} \dots (14)$$

وبحل المعادلات غير الخطية الآتية:

$$Q'(\theta) = 0 \dots (15)$$

وباستخدام إحدى الطرائق العددية التكرارية مثل طريقة (Iterated weighted Least Squares (IWLS) أو طريقة (Iterated Reweighted Least Squares (IRLS)، وذلك باستعمال الأوزان التي يتم حسابها من خلال الصيغة (14) أعلاه نحصل على مقدرات M الحصينة لمعاملات التوزيع، وذلك بعد التعويض عن الدالة ρ بإحدى الدوال الآتية: [Koller et al., 2016: PP.2-4]

1. دالة Huber:

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2}, & \text{if } |u_i| \leq c \\ |u_i|c - \frac{c^2}{2}, & \text{if } |u_i| > c \end{cases}$$

إذ إن قيمة الثابت $c = 1.345$.

2. دالة Bisquare:

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2} - \frac{u_i^4}{2c^2} + \frac{u_i^6}{6c^4}, & \text{if } |u_i| \leq c \\ \frac{c^2}{6}, & \text{if } |u_i| > c \end{cases}$$

وإن قيمة الثابت في هذه الدالة هي $c = 4.685$.

علماً أنه من خلال استخدام دالة وزن Huber مع طريقة M الحصينة نحصل على مقدرات (M.H)، أما عند استخدام دالة وزن Bisquare مع هذه الطريقة نحصل على مقدرات (M.B) وبذلك يكون لدينا اثنتين من طرائق M الحصينة حسب دالة الوزن المستخدمة.

3. **المقارنة بين طرائق التقدير:** بعد أن يتم إيجاد التقديرات باستخدام طرائق التقدير الحصينة أعلاه يتم المقارنة ما بين طرائق تقدير المعلومات وانموذج Chirp Signal وذلك باستعمال أحد المعايير الاحصائية المهمة وهو متوسط مربعات الخطأ لمقدرات مركبة الإشارة والذي يمكن الوصول إلى صيغته الحسابية من خلال اعادة كتابة الأنموذج ذو الصيغة (1) وبعد التعويض عن $(P=1)$ بالشكل الآتي:

$$y(m, n) = I(m, n) + X(m, n) \quad \dots (15)$$

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N$$

إذ إن:

$y(m, n)$: تمثل مركبة الإشارة ملوثة بالضوضاء.

$I(m, n)$: تمثل مركبة الإشارة خالية من الضوضاء وهي تساوي:

$$I(m, n) = A_1 \cos(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2) - B_1 \sin(\alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \eta_1 n + \delta_1 n^2)$$

$X(m, n)$: تمثل مركبة الضوضاء.

وإن الهدف الذي نسعى لتحقيقه هنا هو الحصول على المقدّر $\hat{I}(m, n)$ لمركبة الإشارة الخالية من الضوضاء (أو للصورة الأصلية) $I(m, n)$ الذي يعطي أقل متوسط مربعات خطأ ممكن والذي يتم حسابه باستخدام الصيغة الآتية [Donoho.,1999:PP.859]:

$$MSE(\hat{I}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left[\frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [I(m, n) - \hat{I}_i(m, n)]^2 \right] \dots (16)$$

L : يمثل عدد مرات تكرار التجربة.

4. **المحاكاة (Simulation):** تم في هذا المبحث استخدام أسلوب المحاكاة من خلال برنامج تم كتابته بلغة R، إذ تم افتراض قيم مختلفة للمعلومات المراد تقديرها:

$$(A_1 = 2, B_1 = 3, \alpha_1 = 1.5, \beta_1 = 0.05, \eta_1 = 2.5, \delta_1 = 0.75)$$

واستخدام الصيغة الآتية للخطأ:

$$X(m, n) = \varepsilon(m, n) + 0.25\varepsilon(m-1, n) + 0.25\varepsilon(m+1, n) + 0.25\varepsilon(m, n-1) + 0.25\varepsilon(m, n+1) \dots (17)$$

وتم افتراض توزيع كوشي للخطأ $\varepsilon(m, n)$ بمتوسط صفر ومستويات مختلفة للانحراف المعياري ($\sigma = 0.06, 0.5, 1$) أما بالنسبة لأحجام العينات فقد تم أخذ ($M = N = 40, 50, 60, 75, 100$) وبذلك يكون عدد المشاهدات الكلية المستخدمة مع طرائق التقدير ($MN = 1600, 2500, 5625, 3600, 10000$)، ومن خلاله هذا البرنامج تم الحصول على النتائج الآتية:

جدول (1): يمثل معدل التقديرات لمعاملات المركبة $k=1$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجوم عينات وانحراف معياري $\sigma=0.06$ عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي.

N	Meth	$A_1 = 2$	$B_1 = 3$	$\alpha_1 = 1.5$	$\eta_1 = 2.5$	$\beta_1 = 0.05$	$\delta_1 = 0.75$
40	SR	2.001285	2.998675	1.500005	2.499971	0.04999961	0.7500006
	LAD	1.999671	2.999903	1.500014	2.500039	0.04999933	0.7499991
	M.H	2.000901	2.998901	1.500017	2.499976	0.04999931	0.7500005
	M.B	1.999863	2.999360	1.500042	2.499974	0.04999872	0.7500008
50	SR	1.999446	3.000430	1.500001	2.500012	0.04999973	0.7499999
	LAD	2.000297	3.000061	1.499995	2.499983	0.04999997	0.7500004
	M.H	1.999498	3.000397	1.500011	2.499997	0.04999954	0.7500002
	M.B	2.000485	2.999736	1.499990	2.499985	0.04999999	0.7500004
60	SR	1.999740	3.000044	1.499989	2.500004	0.05000014	0.7500001
	LAD	1.999808	3.000340	1.499996	2.499995	0.05000011	0.7500002
	M.H	1.999292	3.000404	1.499972	2.500017	0.05000044	0.7500000
	M.B	1.999215	3.000766	1.499980	2.500019	0.05000032	0.7499999
75	SR	1.999804	3.000022	1.500000	2.499999	0.05000001	0.7500000
	LAD	2.000143	2.999977	1.500000	2.500003	0.04999996	0.7499999
	M.H	1.999157	3.000574	1.500007	2.500006	0.04999993	0.7499999
	M.B	2.000156	3.000058	1.500010	2.499997	0.04999983	0.7500000
100	SR	1.999974	3.000038	1.500001	2.500000	0.04999997	0.7500000
	LAD	2.000075	2.999999	1.500000	2.499999	0.05000000	0.7500000
	M.H	1.999803	3.000334	1.500005	2.499993	0.04999996	0.7500001
	M.B	2.000076	3.000053	1.499997	2.499998	0.05000002	0.7500000

جدول (2): يمثل متوسط مربعات الخطأ لمعاملات المركبة $k=1$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجوم عينات وانحراف معياري $\sigma=0.06$ عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي.

N	Meth	$A_1 = 2$	$B_1 = 3$	$\alpha_1 = 1.5$	$\eta_1 = 2.5$	$\beta_1 = 0.05$	$\delta_1 = 0.75$
40	SR	0.0003583782	1.661347e-04	2.959594e-07	3.117657e-07	1.998734e-10	1.764526e-10
	LAD	0.0000947727	5.469561e-05	1.119541e-07	1.518328e-07	7.775801e-11	9.276965e-11
	M.H	0.0006317062	2.807212e-04	4.208754e-07	4.323018e-07	2.749940e-10	2.359153e-10
	M.B	0.0005569664	2.617898e-04	3.946717e-07	3.854425e-07	2.405168e-10	2.137538e-10
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
50	SR	1.423579e-04	6.653645e-05	1.216050e-07	1.360739e-07	5.863064e-11	5.627447e-11
	LAD	3.841446e-05	1.693441e-05	4.910059e-08	4.840229e-08	2.308035e-11	2.203279e-11
	M.H	4.010992e-04	1.683027e-04	2.029916e-07	2.182753e-07	8.896796e-11	8.098167e-11
	M.B	3.255477e-04	1.409753e-04	1.676320e-07	1.794577e-07	7.102730e-11	6.772739e-11
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
60	SR	1.127330e-04	6.685584e-05	5.828385e-08	5.221824e-08	1.680479e-11	1.329173e-11
	LAD	1.981246e-05	9.784449e-06	1.969425e-08	1.627067e-08	6.798407e-12	5.116619e-12
	M.H	3.452486e-04	1.817255e-04	1.242940e-07	1.092939e-07	3.312045e-11	2.596036e-11
	M.B	2.910095e-04	1.465668e-04	1.057174e-07	9.135376e-08	2.762366e-11	2.214543e-11
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
75	SR	2.404560e-05	1.639856e-05	9.051610e-09	1.029110e-08	1.642461e-12	1.855974e-12
	LAD	4.994230e-06	1.923266e-06	4.828874e-09	5.194289e-09	9.690580e-13	1.237696e-12
	M.H	1.910313e-04	1.003200e-04	4.617430e-08	4.547750e-08	7.146935e-12	7.288061e-12
	M.B	1.477801e-04	7.546221e-05	3.891014e-08	3.753226e-08	6.298560e-12	6.157142e-12
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
100	SR	2.559219e-07	2.815027e-07	2.524268e-10	2.056781e-10	5.956732e-14	5.809450e-14
	LAD	4.823396e-07	3.013336e-07	3.278849e-10	4.205744e-10	6.481773e-14	8.242353e-14
	M.H	8.572020e-05	3.976853e-05	1.189676e-08	1.314436e-08	1.172468e-12	1.194450e-12
	M.B	7.353966e-05	3.477922e-05	1.079705e-08	1.097254e-08	1.042419e-12	1.030455e-12
	Best	SR	SR	SR	SR	SR	SR

جدول (3): يمثل معدل التقديرات لمعاملات المركبة $k=1$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجوم عينات وانحراف معياري $\sigma=0.50$ عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي

N	Meth	$A_1 = 2$	$B_1 = 3$	$\alpha_1 = 1.5$	$\eta_1 = 2.5$	$\beta_1 = 0.05$	$\delta_1 = 0.75$
40	SR	2.003182	3.005160	1.500016	2.500023	0.04999911	0.7499987
	LAD	2.001678	3.005571	1.499921	2.500022	0.05000268	0.7499994
	M.H	2.001828	2.997971	1.499916	2.500014	0.05000140	0.7499992
	M.B	1.999618	2.997445	1.499725	2.500284	0.05000653	0.7499937
50	SR	1.997886	2.996465	1.499905	2.499755	0.05000159	0.7500070
	LAD	1.994460	2.999444	1.500043	2.499956	0.04999849	0.7500026
	M.H	2.005004	2.983236	1.499781	2.499580	0.05000347	0.7500099
	M.B	2.004825	2.983964	1.499818	2.499685	0.05000266	0.7500071
60	SR	2.001850	3.003032	1.499967	2.500027	0.05000026	0.7499989
	LAD	2.002247	3.001434	1.499962	2.499998	0.05000075	0.7499997
	M.H	1.996853	3.003322	1.500015	2.500031	0.04999965	0.7499991
	M.B	2.003355	2.999668	1.500159	2.499764	0.04999776	0.7500029
75	SR	2.000447	2.999974	1.500044	2.499972	0.04999979	0.7500003
	LAD	1.999817	3.000035	1.499990	2.500021	0.05000040	0.7499997
	M.H	2.005555	2.991408	1.499959	2.499908	0.05000070	0.7500011
	M.B	2.000293	2.996458	1.500036	2.499938	0.04999956	0.7500009
100	SR	2.000133	3.000211	1.500011	2.499963	0.05000005	0.7500003
	LAD	2.000558	3.000854	1.499992	2.499997	0.05000025	0.7499999
	M.H	1.996777	3.002788	1.499984	2.500048	0.05000030	0.7499995
	M.B	1.995147	3.004525	1.500013	2.500053	0.05000012	0.7499994

جدول (4): يمثل متوسط مربعات الخطأ لمعاملات المركبة $k=1$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجوم عينات وانحراف معياري $\sigma=0.50$ عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي

N	Meth	$A_1 = 2$	$B_1 = 3$	$\alpha_1 = 1.5$	$\eta_1 = 2.5$	$\beta_1 = 0.05$	$\delta_1 = 0.75$
40	SR	7.273831e-04	1.314049e-03	1.383449e-05	1.466420e-05	1.083882e-08	9.397133e-09
	LAD	3.061011e-03	2.123715e-03	7.338731e-06	9.478803e-06	5.520131e-09	6.377588e-09
	M.H	3.651536e-02	1.709362e-02	2.737614e-05	2.860857e-05	1.757287e-08	1.598154e-08
	M.B	3.551040e-02	1.717003e-02	2.592147e-05	2.791277e-05	1.607833e-08	1.605428e-08
	Best	SR	SR	LAD	LAD	LAD	LAD
50	SR	7.780047e-04	1.677409e-03	6.639441e-06	6.304686e-06	3.285196e-09	2.837720e-09
	LAD	2.957964e-03	1.390248e-03	3.600058e-06	3.857095e-06	1.848028e-09	1.642938e-09
	M.H	3.192301e-02	1.655513e-02	1.511036e-05	1.453033e-05	6.100452e-09	5.408945e-09
	M.B	2.725436e-02	1.332205e-02	1.149973e-05	1.305997e-05	4.469884e-09	4.890000e-09
	Best	SR	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
60	SR	2.625142e-04	5.406703e-04	4.510622e-06	3.662347e-06	1.363550e-09	1.039022e-09
	LAD	4.681708e-04	5.198040e-04	2.250613e-06	1.680874e-06	7.298201e-10	4.981030e-10
	M.H	1.946331e-02	9.084721e-03	8.527000e-06	8.026339e-06	2.329264e-09	1.931254e-09
	M.B	1.445104e-02	7.281357e-03	6.089137e-06	6.334308e-06	1.718079e-09	1.540510e-09
	Best	SR	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
75	SR	1.692098e-04	3.734384e-04	1.193379e-06	1.201793e-06	2.050628e-10	2.562961e-10
	LAD	1.332839e-04	2.341229e-04	6.985034e-07	6.898298e-07	1.295356e-10	1.538810e-10
	M.H	1.462764e-02	6.818593e-03	2.614679e-06	4.021748e-06	4.007746e-10	6.555643e-10
	M.B	1.148575e-02	5.167361e-03	2.014523e-06	2.942044e-06	3.118744e-10	4.712162e-10
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
100	SR	1.152817e-05	3.631704e-05	2.084994e-07	1.333862e-07	2.421363e-11	1.864935e-11
	LAD	2.324777e-05	3.937165e-05	4.759308e-08	5.599253e-08	7.754484e-12	8.572901e-12
	M.H	6.872570e-03	3.494246e-03	9.917822e-07	9.311654e-07	9.376293e-11	8.968514e-11
	M.B	6.025858e-03	3.041040e-03	8.355895e-07	7.483992e-07	7.564110e-11	7.052550e-11
	Best	SR	SR	LAD	LAD	LAD	LAD

جدول (5): يمثل معدل التقديرات لمعاملات المركبة $k=1$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجوم عينات وانحراف معياري $\sigma=1$ عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي

N	Meth	$A_1 = 2$	$B_1 = 3$	$\alpha_1 = 1.5$	$\eta_1 = 2.5$	$\beta_1 = 0.05$	$\delta_1 = 0.75$
40	SR	1.998147	2.997194	1.499425	2.500478	0.05001612	0.7499885
	LAD	1.995612	3.001632	1.499971	2.499917	0.05000651	0.7500007
	M.H	2.004817	2.969091	1.499171	2.500370	0.05001998	0.7499901
	M.B	2.016033	2.964986	1.498985	2.499977	0.05002448	0.7499992
50	SR	2.000805	3.003999	1.500198	2.500132	0.04999371	0.7499948
	LAD	2.009069	2.999470	1.499909	2.500144	0.04999984	0.7499952
	M.H	1.970173	3.008293	1.500714	2.500467	0.04998373	0.7499883
	M.B	1.986443	2.991227	1.500285	2.500465	0.04999164	0.7499871
60	SR	2.000361	2.998905	1.499914	2.500061	0.04999950	0.7499997
	LAD	1.999599	2.999662	1.500117	2.500024	0.04999649	0.7499984
	M.H	1.997433	2.981682	1.499713	2.500141	0.05000232	0.7499985
	M.B	2.002059	2.982709	1.499665	2.500105	0.05000373	0.7499988
75	SR	2.000609	3.000642	1.499982	2.500114	0.05000033	0.7499978
	LAD	2.000827	3.000604	1.499958	2.500068	0.05000122	0.7499983
	M.H	1.989866	2.997921	1.500090	2.500105	0.04999918	0.7499980
	M.B	1.991077	2.993876	1.500031	2.500096	0.04999964	0.7499982
100	SR	1.999705	2.999564	1.500031	2.500054	0.04999954	0.7499995
	LAD	1.999758	2.999468	1.499990	2.500010	0.05000003	0.7500001
	M.H	1.989414	2.995934	1.500122	2.500069	0.04999866	0.7499993
	M.B	1.994396	2.991871	1.500117	2.500049	0.04999849	0.7499994

جدول (6): يمثل متوسط مربعات الخطأ لمعاملات المركبة $k=1$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجوم عينات وانحراف معياري $\sigma=1$ عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي

N	Meth	$A_1 = 2$	$B_1 = 3$	$\alpha_1 = 1.5$	$\eta_1 = 2.5$	$\beta_1 = 0.05$	$\delta_1 = 0.75$
40	SR	2.476569e-03	3.610840e-03	5.923572e-05	6.250795e-05	4.064584e-08	3.862004e-08
	LAD	7.912081e-03	4.097355e-03	3.315009e-05	3.382814e-05	2.311331e-08	2.226868e-08
	M.H	1.712252e-01	7.657830e-02	1.095547e-04	1.226497e-04	6.622247e-08	6.555868e-08
	M.B	1.644846e-01	7.773097e-02	9.996163e-05	1.248815e-04	5.734375e-08	6.855121e-08
	Best	SR	SR	LAD	LAD	LAD	LAD
50	SR	1.975744e-03	4.161468e-03	2.889952e-05	2.779471e-05	1.431366e-08	1.379770e-08
	LAD	6.003466e-03	5.019612e-03	1.750959e-05	1.293041e-05	8.581934e-09	6.393731e-09
	M.H	1.238159e-01	5.742817e-02	5.643277e-05	6.216486e-05	2.410564e-08	2.435834e-08
	M.B	1.081271e-01	4.515325e-02	4.923558e-05	5.397686e-05	1.991231e-08	2.010660e-08
	Best	SR	SR	LAD	LAD	LAD	LAD
60	SR	1.025938e-03	2.197116e-03	1.512097e-05	1.247442e-05	4.646975e-09	3.539928e-09
	LAD	6.649266e-04	1.565490e-03	7.335722e-06	6.289336e-06	2.499815e-09	1.915936e-09
	M.H	9.523093e-02	5.210864e-02	2.816029e-05	3.637702e-05	7.638965e-09	8.431029e-09
	M.B	7.534547e-02	3.795132e-02	2.553632e-05	2.573551e-05	6.628473e-09	6.200399e-09
	Best	LAD	SR	LAD	LAD	LAD	LAD
75	SR	3.283701e-04	1.012932e-03	5.251559e-06	4.802942e-06	8.944198e-10	1.013742e-09
	LAD	2.053567e-04	5.114497e-04	2.481513e-06	2.664642e-06	4.346952e-10	5.577634e-10
	M.H	5.287674e-02	2.834510e-02	1.215097e-05	1.235016e-05	1.888074e-09	2.080415e-09
	M.B	4.532360e-02	2.324733e-02	1.029081e-05	9.745742e-06	1.604390e-09	1.646748e-09
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
100	SR	2.430034e-05	6.311294e-05	1.157838e-06	8.063143e-07	1.443933e-10	1.056011e-10
	LAD	2.239822e-05	1.245377e-04	4.417834e-07	3.219302e-07	6.022405e-11	4.792814e-11
	M.H	2.564164e-02	1.225638e-02	4.235893e-06	3.571551e-06	4.452587e-10	3.363985e-10
	M.B	2.486127e-02	1.094387e-02	3.655177e-06	2.959711e-06	3.705754e-10	2.895901e-10
	Best	LAD	SR	LAD	LAD	LAD	LAD

جدول (7): يمثل متوسط مربعات الخطأ ومعدل الخطأ المطلق للانموذج وفق طرائق التقدير المختلفة ولكافة القيم التي تم افتراضها من حجوم العينات والانحراف وذلك عندما يتبع توزيع الخطأ توزيع كوشي

Sigma		0.06		0.5		1	
N	Meth	MSE	MAE	MSE	MAE	MSE	MAE
40	SR	0.0001162836	0.007825329	0.006666704	0.05878401	0.02335358	0.1095945
	LAD	6.848859e-05	0.005506215	0.004745495	0.04765232	0.01728061	0.0905156
	M.H	0.0001409916	0.008837617	0.008970696	0.07062527	0.03363106	0.1374611
	M.B	0.000128157	0.008494404	0.008426371	0.06917215	0.03203085	0.134815
	Best	SR	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
50	SR	9.369642e-05	0.006788885	0.005833688	0.05529049	0.02346657	0.1062342
	LAD	5.406095e-05	0.004957867	0.003725594	0.04159994	0.01531194	0.08424735
	M.H	0.0001174718	0.007998566	0.008013527	0.06811057	0.03243585	0.1333447
	M.B	9.351256e-05	0.007246547	0.006376948	0.06085962	0.02653667	0.1224041
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
60	SR	5.733183e-05	0.005268853	0.003998591	0.04437624	0.01570722	0.08765151
	LAD	3.105247e-05	0.003660762	0.002538273	0.03415352	0.01032931	0.06895971
	M.H	8.517027e-05	0.007037066	0.005650802	0.05680065	0.02440555	0.1190355
	M.B	6.861572e-05	0.00629988	0.004459258	0.05066945	0.01892966	0.1044152
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
75	SR	2.365525e-05	0.003221187	0.001939042	0.03004776	0.008072625	0.06200579
	LAD	1.793145e-05	0.002806103	0.001381349	0.0251722	0.005535735	0.05002189
	M.H	4.930612e-05	0.00539324	0.003496986	0.04560295	0.0135754	0.08931319
	M.B	4.075652e-05	0.004852259	0.002879039	0.04158952	0.01111192	0.08068216
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD
100	SR	9.68836e-06	0.002021099	0.0008366708	0.01827186	0.003613752	0.03868963
	LAD	7.647933e-06	0.001792659	0.0005814226	0.01561797	0.002503553	0.03221946
	M.H	2.407902e-05	0.003741234	0.00186903	0.03274283	0.007447081	0.06557241
	M.B	2.132663e-05	0.003534887	0.001555947	0.02995843	0.006434648	0.06127153
	Best	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD	LAD

تحليل نتائج المحاكاة:

1. من خلال الجدول رقم (1) و(3) و(5) نلاحظ أن معدل تقدير المعلمات بكافة طرائق التقدير قريب من القيم الحقيقية، وذلك لكافة حجوم العينات ومستويات الانحراف المعياري مما يدل على حصانة طرائق التقدير في ايجاد تقدير المعلمات.

2. من خلال الجدول رقم (2) و(4) و(6) نلاحظ ما يأتي:

- أ. أنا طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى (LAD) تأتي من حيث الأفضلية بالمرتبة الأولى وذلك من حيث امتلاك أقل متوسط مربعات خطأ (MSE) للمعاملات مقارنة بالطرق الأخرى. تليها في ذلك طريقة مقدر رتبة الإشارة (SR) ومن ثم طريقة M الحصينة.
- ب. نلاحظ أن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) تتناقص بازدياد حجم العينة ولكافة طرائق التقدير ومستويات الانحراف المعياري.
- ج. إن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) يزداد بازدياد قيمة الانحراف المعياري ولكافة أحجام العينات.
3. من خلال الجدول رقم (7) نلاحظ أن:
- أ. إن طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى (LAD) تأتي بالمرتبة الأولى في تقدير النموذج Chirp Signal ذي البعدين لامتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ (MSE) للنموذج مقارنة بكافة طرائق التقدير الأخرى تليها طريقة مقدر رتبة الإشارة (SR) التي حققت المرتبة الثانية من حيث الأفضلية ومن ثم طريقة M الحصينة.
- ب. من خلال مقارنة كل من طريقة M الحصينة بالاعتماد على دالة وزن (M.H) Huber وطريقة M الحصينة بالاعتماد على دالة وزن (M.B) Bisquare، نلاحظ أن طريقة (M.B) تفوقت على طريقة (M.H) من حيث امتلاك أقل متوسط مربعات خطأ للنموذج وذلك لكافة أحجام العينات، ومستويات الانحراف المعياري.
- ج. إن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للنموذج Chirp Signal ذي المتغيرين تتناقص بازدياد حجم العينة لكافة طرائق التقدير وعند كافة مستويات الانحراف المعياري.
- د. إن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للنموذج Chirp Signal ذي المتغيرين تزداد بازدياد مستوى الانحراف المعياري ولكافة طرائق التقدير.

الاستنتاجات والتوصيات

أولاً. الاستنتاجات:

1. تمكنت الباحثة من اقتراح توظيف طرائق حصينة لتقدير معاملات النموذج Chirp Signal ذي البعدين وقد كانت هذه الطرائق كفوءة في تقدير معاملات النموذج في حالة استخدامها مع أحد التوزيعات ثقيلة الذيل وهو توزيع كوشي للخطأ، علماً أن الخوارزميات كافة وطريقة المربعات الصغرى التي تم استخدامها من قبل الباحثين في المصادر التي تم الإشارة إليها في البحث هي غير حصينة وتستخدم تحت الظروف المثالية (أي عدم وجود قيم شاذة وتوزيع طبيعي للخطأ)، وإن أدائها يتدهور بشدة في وجود قيم شاذة أو عندما يتبع الخطأ توزيعاً ثقیلاً الذيل مثل توزيع كوشي. لذلك وفي مثل هذه الحالات يجب اللجوء إلى الطرائق الحصينة في تقدير المعاملات.
2. تفوق طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى (LAD) على كافة طرائق التقدير الحصينة الأخرى في تقدير معاملات النموذج وكذلك الأفضل في تقدير النموذج.
3. تفوق طريقة مقدر رتبة الإشارة (SR) على كافة طريقة M الحصينة (M.H) وكذلك (M.B) في تقدير معاملات النموذج وكذلك الأفضل في تقدير النموذج.
4. تفوق طريقة M الحصينة (M.B) على طريقة (M.H) في تقدير النموذج Chirp Signal ذي البعدين.

ثانياً. التوصيات:

1. استخدام طريقة (LAD) في تقدير المعلمات ومن ثم في تقدير انموذج Chirp Signal ذي المتغيرين وذلك في حالة توزيع كوشي للخطأ.
2. استخدام دوال وزن أخرى مع طريقة M الحصينة مثل دالة وزن Hample ودالة وزن Anderwise ودالة وزن Optimal ومقارنتها مع طريقة M الحصينة التي اعتمدت على دالة وزن Huber ودالة وزن Bisquare التي تم استخدامها في هذا البحث.
3. اجراء جانب تطبيقي من حيث نمذجة الاشارات ذات البعدين أو الصور الرمادية بأنموذج Chirp Signal ذي المتغيرين واستخلاص النسجة الأصلية من النسجة المشوشة أو التي تحتوي على الضوضاء من خلال تقدير معلمات هذا الانموذج من خلال الطريقة الأفضل التي تم التوصل إليها في هذا البحث.

المصادر

1. Donoho, D. L. (1999). Wedgelets: Nearly minimax estimation of edges. The Annals of Statistics, 27(3), 859-897.
2. Francos, J. M., & Friedlander, B. (1998). Two-dimensional polynomial phase signals: Parameter estimation and bounds. Multidimensional Systems and Signal Processing, 9(2), 173-205.
3. Francos, J. M., & Friedlander, B. (2002). Parameter estimation of 2-D random amplitude polynomial-phase signals. IEEE transactions on signal processing, 47(7), 1795-1810.
4. Friedlander, B., & Francos, J. M. (1996). An estimation algorithm for 2-D polynomial phase signals. IEEE transactions on image processing, 5(6), 1084-1087.
5. Grover, R., Kundu, D., & Mitra, A. (2018). Approximate least squares estimators of a two-dimensional chirp model and their asymptotic properties. Journal of Multivariate Analysis, 168, 211-220.
6. Koller, M., & Machler, M. (2016). Definitions of ψ -Functions Available in Robustbase.
7. Kundu, D. (2023). Robust Parameter Estimation of Two Dimensional Chirp Model.
8. Kundu, D., Nandi, S., & Grover, R. (2024). On weighted least squares estimators for chirp like model. Sankhya A, 86(1), 27-66.
9. Lahiri, A, Estimators of Parameters of Chirp Signals and Their Properties (Ph.D. thesis), Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2013.
10. Lahiri, A., Kundu, D., & Mitra, A. (2011). On parameter estimation of two dimensional Chirp Signals. Submitted for publication.
11. Lahiri, A., Kundu, D., & Mitra, A. (2013). Efficient algorithm for estimating the parameters of two dimensional Chirp Signal. Sankhya B, 75(1), 65-89.
12. Leiva, V., Sanhueza, A., Sen, P. K., & Araneda, N. (2010). M-procedures in the general multivariate nonlinear regression model. Pakistan Journal of Statistics, 26(1), 1-13.
13. Mitra, S., Mitra, A., & Kundu, D. (2011). Genetic algorithm and M-estimator based robust sequential estimation of parameters of nonlinear sinusoidal signals. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(7), 2796-2809.

14. Nguelifack, B. M., Kwessi, E. A., & Abebe, A. (2015). Generalised signed-rank estimation for nonlinear models with multidimensional indices. *Journal of Nonparametric Statistics*, 27(2), 215-228.
15. Peleg, S., & Porat, B. (2002). Estimation and classification of polynomial-phase signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(2), 422-430.
16. Shukla, A., Grover, R., Kundu, D., & Mitra, A. (2023). A computationally efficient algorithm to estimate the parameters of a two-dimensional chirp model with the product term. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 34(3), 633-655.
17. Simeunović, M., & Djurović, I. (2015). Parameter estimation of multicomponent 2D polynomial-phase signals using the 2D PHAF-based approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(3), 771-782.
18. Zhang, K., Wang, S., & Cao, F. (2008, May). Product cubic phase function algorithm for estimating the instantaneous frequency rate of multicomponent two-dimensional Chirp Signals. In *2008 Congress on image and signal processing* (Vol. 5, pp. 498-502). IEEE.
19. https://cran.rproject.org/web/packages/robustbase/vignettes/psi_functions.pdf