



**Tikrit Journal of Administrative  
and Economic Sciences**  
مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية

ISSN: 1813-1719 (Print)



**A modified Liu estimator for the Inverse Gaussian Regression Model**

**Ahmed mutlag abdulateef\***

College of Physical Education and Sport Sciences, University of Samarra, Salah Aldeen, Iraq

**Keywords:**

Inverse Gaussian Regression Model (IGRM), Ridge Regression Estimator (RRE), Liu Estimator (LE), Multicollinearity, and MIGLE.

**ARTICLE INFO**

**Article history:**

Received 12 Mar. 2023

Accepted 30 Mar. 2023

Available online 30 Jun. 2023

©2023 College of Administration and Economy, Tikrit University. THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER THE CC BY LICENSE

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



**\*Corresponding author:**



**Ahmed mutlag abdulateef**

College of Physical Education and Sport Sciences, University of Samarra, Salah Aldeen, Iraq

**Abstract:** Multicollinearity poses an undesirable effect on the efficiency of the maximum likelihood estimator (MLE) in Inverse Gaussian Regression Model (IGRM). The Inverse Gaussian Regression Model (IGRM) is used when the response variable is positively skewed and follows an inverse Gaussian distribution. To mitigate this problem, The ridge and the Liu estimators have been developed as an alternative to the MLE. Both estimators possess smaller mean squared error (MSE) over the MLE. the drawback of using the traditional Liu estimator is that in most of the times, the shrinkage parameter  $d$ , attains a negative value which is the major disadvantage of traditional Liu estimator. So, to overcome this problem, we propose a new adjusted Inverse Gaussian Liu estimator (MIGLE) for the (IGRM) which is the robust solution to the problem of multicollinear explanatory variables. We compare the proposed estimator's performance with some existing estimators in the simulation study, and real-life application. Smaller mean squared error MSE criterion shows that the proposed estimator with one of its shrinkage parameters performs the best.

## مقدر ليو Liu المعدل لنموذج انحدار غاوس المعكوس

أحمد مطك عبداللطيف

كلية التربية البدنية وعلوم الرياضة

جامعة سامراء

## المستخلص

إن مشكلة التعدد الخطي لها تأثيراً غير مرغوب فيه على كفاءة مقدر الإمكان الأعظم (MLE) في نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM). يتم استخدام نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM) عندما يكون متغير الاستجابة منحرفاً بشكل إيجابي ويتبع توزيع غاوس المعكوس. للتقليل من هذه المشكلة، تم تطوير مقدرات انحدار الحرف ومقدر ليو كبديل لـ MLE. كلا المقدرين يمتلكان متوسط مربعات خطأ (MSE) أصغر من MLE. عيب استخدام مقدر Liu التقليدي هو أنه في معظم الأوقات، يصل معامل التحيز  $d$  إلى قيمة سالبة وهي عيب رئيسي لمقدر Liu التقليدي. لذلك، للتغلب على هذه المشكلة، تم اقتراح مقدرًا جديدًا معدلاً وهو مقدر ليو غاوس المعكوس (MIGLE) لـ (IGRM). يتم مقارنة أداء المقدر المقترح مع بعض المقدرات الموجودة في دراسة المحاكاة والتطبيق الواقعي. يوضح معيار MSE أن المقدر المقترح يمتلك أقل متوسط مربعات خطأ MSE ويحقق أفضل أداء مقارنة بالمقدرات الأخرى.

**الكلمات المفتاحية:** نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM)، انحدار الحرف (RRE)، مقدر ليو (LE)، التعدد الخطي، MIGLE.

## المقدمة

في العديد من تطبيقات نماذج الانحدار، يوجد ارتباط بين المتغيرات التوضيحية. عندما تكون الارتباطات بين المتغيرات عالية فإنها تؤدي إلى تقدير غير مستقر لمعاملات الانحدار مما يؤدي إلى صعوبات في تفسير تقديرات معاملات الانحدار، عند وجود مشكلة التعدد الخطي يكون من الصعب تقدير التأثيرات الفردية لكل متغير توضيحي في النموذج. وكذلك فإن تباين معاملات الانحدار سوف يؤثر على كل من الاستدلال والتنبؤ للنموذج. وهناك العديد من الطرق التي تم اقتراحها لحل مشكلة التعدد الخطي (Algamal, 2019: 4). يتم استخدام نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM) عندما يكون متغير المعتمد منحرفاً بشكل موجب، وله تطبيقات واسعة في مجال العلوم الكيميائية والاجتماعية والطبية والصحية (Bhattacharyya & Fries, 1982). يستخدم مقدر الإمكان الأعظم (MLE) الأكثر شيوعاً لتقدير المعاملات غير المعروفة لـ IGRM. أحد الافتراضات لنموذج الانحدار المتعدد هو أن المتغيرات التوضيحية تكون مستقلة وغير مرتبطة مع بعضها. يكون أداء MLE أفضل إذا كانت المتغيرات التوضيحية مستقلة وغير مرتبطة مع بعضها (Varathan & Wijekoon, 2021). ولكن من الناحية العملية، يمكن العثور على العلاقة الخطية بين المتغيرات التوضيحية التي تخضع لمشكلة التعدد الخطي. تم تقديم مشكلة الخطية المتعددة هذه بواسطة (Frisch, 1934)، ولديها بعض أوجه القصور في تقدير المعلمات باستخدام MLE. تتمثل إحدى المشكلات في أن تقديرات المعلمات تكون لها تباينات كبيرة لا يمكن أن توفر نتائج جيدة. وكذلك يمكن أن تنتج MLE تقديرات خاطئة للمعاملات المقدر. الناحية

الأخرى لهذه المشكلة هي حدود الثقة الواسعة وانخفاض القوة الإحصائية في اتخاذ القرار المناسب مما يؤدي إلى زيادة احتمال الخطأ من النوع الثاني المتعلق باختبار الفرضية لمعاملات الانحدار. تتوفر طرق عدة لمعالجة والتخلص من مشكلة التعدد الخطي. انحدار الحرف (Ridge regression) هي أحد أكثر الطرق شيوعاً التي طورها (Hoerl & Kennard, 1970). تم إجراء دراسات مختلفة لنموذج الانحدار الخطي (LRM) لتحديد القيمة المثلى لمعامل الانكماش لانحدار الحرف؛ على سبيل المثال، (Hoerl & Kennard, 1970)، (Kibria & Saleh, 2012)، (Khalaf & Shukur, 2005) وغيرهم الكثير. طور (Segerstedt, 1992) نهج انحدار الحرف (Ridge regression) في النموذج الخطي المعمم (GLM) Generalized Linear Mode، ومن خلال توسيع فكرة (Segerstedt, 1992)، اقترح العديد من الباحثين نهج انحدار الحرف لنماذج مختلفة على سبيل المثال، (Månsson & Shukur, 2011)، (Kibria et al., 2012: 1). (Amin et al., 2020).

اقترح (Kejian, 1993) مقدر ليو وهو مقدر مفيد للتغلب على مشكلة التعدد الخطي، الميزة الأساسية لمقدر Liu هي أن معامل التحيز  $d$  هو معادلة خطية للتقديرات بدلاً من المعادلة غير الخطية كما هو الحال في معلمة انحدار الحرف  $k$ . تمت دراسة أداء مقدر Liu في LRM من بعض الباحثين؛ على سبيل المثال، (Akdeniz & Kaçiranlar, 2001)، (Alheety & Kibria, 2009)، (Qasim, Amin, B. M. G. Kibria, 2012) ومؤخراً (Qasim et al., 2020). تم اقتراح بعض الدراسات حول مقدر Liu لنماذج مختلفة من GLM؛ على سبيل المثال، (Qasim, Kibria, et al., 2020). طور مقدر ليو في انحدار بواسون وقدم (Kurtoğlu & Özkale, 2016) تقدير ليو في GLM، كما اقترح (Qasim et al., 2018) مقدر ليو لنموذج انحدار جاما، ومؤخراً قدم (Akram et al., 2020) اقتراح مقدر ليو جديد لنموذج انحدار غاوس المعكوس. اقترح ليو (Liu, 2003) مقدرًا من نوع Liu-type وهو مزيج من كل من انحدار الحرف ridge regression ومقدر (Liu) لمعالجة مشكلة التعدد الخطي وأظهر أن أداء المقدر المقترح أفضل من انحدار الحرف ومقدر Liu.

### المحور الأول: منهجية البحث

**أولاً. مشكلة البحث:** تعد مشكلة التعدد الخطي (Multicollinearity) من المشاكل الشائعة في تحليل البيانات في نماذج الانحدار والتي تتعامل مع الارتباط الداخلي بين المتغيرات التوضيحية، حيث يكون لمشكلة التعدد الخطي تأثير سلبي في عملية تقدير معاملات نماذج الانحدار، حيث يكون تقدير هذه المعلمات غير مستقر بسبب التضخم العالي للتباين عند استخدام طرق التقدير الكلاسيكية مثل طريقة المربعات الصغرى (OLS) أو طريقة الامكان الأعظم (MLE) مما يؤدي إلى قدرة تنبؤية ضعيفة لأنموذج الانحدار، لذلك يتم استخدام طرق بديلة يتم من خلالها معالجة هذه المشكلة. **ثانياً. أهمية البحث:** تأتي أهمية البحث في كيفية معالجة مشكلة التعدد الخطي (Multicollinearity) من خلال تقديم طرق حديثة يمكن من خلالها معالجة مشكلة الارتباط بين المتغيرات التوضيحية والحصول على تقديرات مستقرة وتباين منخفض لمعاملات نموذج انحدار غاوس المعكوس.

**ثالثاً. هدف البحث:** الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو تقديم مقدر Liu المعدل لـ IGRM، والذي يجمع بين مزايا انحدار الحرف (ridge regression) ومقدر Liu من خلال توسيع عمل

(Amin et al., 2021). ومقارنة أداء المقدر المقترح مع المقدرات الاخرى، من خلال إجراء محاكاة مونت كارلو حيث يتم استخدام متوسط الخطأ التربيعي (MSE) كمعيار أداء للطرق. اضافة الى ذلك يتم توضيح تفوق المقدر المقترح من خلال تطبيقه على البيانات الحقيقية.

### المحور الثاني: نموذج الدراسة

نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM): يعتبر توزيع غاوس المعكوس هو أحد التوزيعات المستمرة يحتوي على معلمتين موجبتين وهما معلمة الموقع ( $\mu$ )، ومعلمة التشنت ( $\tau$ )، يتم استخدام IGRM عندما يتبع متغير الاستجابة  $y_i$  نمطاً منحرفاً بشكل إيجابي. يرمز لتوزيع غاوس المعكوس بالرمز  $IG \sim (\mu, \tau)$  يتم تعريف دالة الكثافة الاحتمالية كالآتي:

$$f(y|\mu, \tau) = \left[ \frac{\tau}{2\pi y^3} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2\mu^2 y} (y - \mu)^2 \right\}, y > 0 \quad (1)$$

يعتبر نموذج انحدار غاوس والمعكوس (IGRM) أحد افراد عائلة النماذج الخطية المعممة (GLM)، مما يوسع الانحدار الخطي إلى الحالة التي يتبع فيها متغير التابع التوزيع غاوس والمعكوس (IGRM) باتباع منهج GLM. يمكن إعادة الكتابة المعادلة رقم 1 بصيغة العائلة الأسية كالآتي (Akram et al., 2020: 2) (Algamal, 2019: 2):

$$f(y, \mu, \tau) = \left\{ \frac{y\theta - b(\theta)}{\phi} + C(y, \phi) \right\} \quad (2)$$

حيث إن:

$\theta$ : تسمى معلمة الربط أو دالة الارتباط The canonical parameter or link function

$b(\theta)$ : تسمى الدالة التراكمية The cumulant function,

$\phi$ : هي معلمة التشنت The dispersion parameter

$C(y, \phi)$ : الحد الطبيعي the normalization term

$$f(y, \mu, \tau) = \exp \left\{ \frac{-\tau(y^2 + \mu^2 - 2\mu y)}{2\mu^2 y} - \frac{1}{2} \ln(2\pi y^3) + \frac{1}{2} \ln(\tau) \right\} \quad (3)$$

ولتبسيط المعادلة رقم (3) أكثر يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$f(y, \mu, \tau) = \exp \left( \tau \left( \frac{-y}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu} \right) + \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \ln \left( \frac{2\pi y^3}{\tau} \right) + \frac{\tau}{y} \right) \right) \quad (4)$$

وعليه فإن (Akram et al., 2020: 2):

$$x_i^T \beta = \frac{1}{\mu}, \sqrt{\eta} = \frac{1}{\mu}, \mu = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

ومن خلال مقارنة معادلة (4) مع معادلة (1) نحصل على:

$$\phi = \frac{1}{\tau} \theta = \frac{1}{2\mu^2}, b(\theta) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-2\theta}},$$

ويمكن الحصول على المتوسط والتباين للمعادلة 4 باستخدام دالة الربط كالاتي:

$$E[y] = b'(\theta) = \frac{\partial b}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = \frac{-1}{\mu^2} (-\mu^3) = \mu = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad (5)$$

$$V[y] = \phi b''(\theta) = \phi V[\mu] = \frac{1}{\tau} \frac{-1}{\mu^{-3}} = \frac{\mu^3}{\tau} \quad (6)$$

حيث ان  $\phi = \frac{1}{\tau}$ .

وبالاعتماد على طريقة الإمكان الأعظم في تقدير معاملات نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM). يمكن تعريف دالة الإمكان اللوغاريتمية لهذا النموذج بالشكل الآتي (Algamal, 2019; 2):

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n \left( \tau \left( \frac{-y_i}{2\mu_i^2} + \frac{1}{\mu_i} \right) + \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \ln \left( \frac{2\pi y_i^3}{\tau} \right) + \frac{\tau}{y_i} \right) \right) \quad (7)$$

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n \left( \tau \left( \frac{-y_i x_i^T \beta}{2} - \sqrt{x_i^T \beta} \right) + \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \ln \left( \frac{2\pi y_i^3}{\tau} \right) + \frac{\tau}{y_i} \right) \right) \quad (8)$$

وبحساب المشتقة الجزئية الأولى للمعاملات  $\beta$  للمعادلة (8) ومساواتها بالصفر يتم الحصول على مقدر الإمكان الأعظم لـ (IGRM) بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\phi} \left[ y_i - \frac{1}{\sqrt{x_i^T \beta}} \right] x_i^T = 0 \quad (9)$$

نلاحظ أن المشتقة الأولى لا يمكن حلها لأن المعادلة (9) هي غير خطية للمعلمة  $\beta$ . لمعالجة هذه الحالة يمكن استخدام التقنيات العددية (Salh et al., 2021: 544) حيث يتم استخدام طريقة Newton Raphson iterative method (Mawlood, 2021) أو خوارزمية المربعات الصغرى الموزونة التكرارية (IRLS) للحصول على معاملات انحدار غاوس المعكوس (IGRM). حيث يتم تحديث المعاملات في كل تكرار بالصيغة الآتية (Algamal, 2019;2):

$$\hat{\beta}^{(r+1)} = \hat{\beta}^{(r)} + (X^T W^r X)^{-1} X^T (y - \hat{\mu}^r) \quad (10)$$

حيث تمثل  $r$  عدد التكرارات. يتم الحصول على  $MLE$  من خلال تطبيق خوارزمية  $IRLS$  الآتية.

$$\hat{\beta}_{IGRM} = D^{-1} X^T \hat{W} \hat{Z} \quad (11)$$

حيث إن

$$D = (X^T \hat{W} X),$$

$$\hat{W} = \text{diag} (\hat{\mu}_i^3)$$

$\hat{Z}$  هو متغير الاستجابة المعدل ويكون مقداره كالاتي:

$$\hat{z}_i = \left( \frac{1}{\hat{\mu}_i^2} \right) + \left( \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)}{\hat{\mu}_i^3} \right)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\sqrt{x_i^T \hat{\beta}}}$$

ومصفوفة التباين المشترك لـ  $\hat{\beta}_{IGRM}$  تساوي:

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{IGRM}) = \left[ -E \left( \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^T} \right) \right]^{-1} = \phi D^{-1} \quad (12)$$

و MMSE مصفوفة متوسط مربعات الخطأ تساوي:

$$\text{MMSE}(\hat{\beta}_{IGRM}) = \phi(Q\Lambda^{-1}Q^T) \quad (13)$$

حيث  $Q$  هي مصفوفة تكون اعمدتها المتجهات الذاتية لـ  $D$ .

وإن  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  المصفوفة القطرية للقيم الذاتية لـ  $D$ .

وإن متوسط مربعات الخطأ MSE يمكن ايجاده كالاتي:

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\beta}_{IGRM}) &= E(\hat{\beta}_{IGRM} - \hat{\beta})^T (\hat{\beta}_{IGRM} - \hat{\beta}) \\ &= \phi \text{tr}[D^{-1}] \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} \end{aligned} \quad (14)$$

حيث  $\lambda_j$  هي القيمة المميزة وهي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة  $D$ .

مقدر انحدار الحرف **Ridge Regression Estimator (RRE)**: قدم الباحثان Hoerl و Kennard (Hoerl & Kennard, 1970) مقدر انحدار الحرف (RRE) لمعالجة والتخلص من مشكلة التعدد الخطية في نماذج الانحدار وذلك من خلال إضافة كمية موجبة متحيزة الى عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة المعلومات  $X'X$ . تم تمديد المقدر إلى النموذج الخطي المعمم (GLM) بواسطة (Segerstedt, 1992)، وقد طور الباحث (Algamal, 2019: 3) مقدر الحرف لنموذج غاوس المعكوس (IGRE) للمعلمة  $\beta$  وتم تعريفه على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{RRE}^{IGRE} &= (X'WX + kI)^{-1} X'WZ \quad k > 0, \\ \mathbf{b}_{GRE} &= (D + kI)^{-1} D \hat{\beta}_{MLE} \end{aligned} \quad (15)$$

حيث إن  $D = X'WX$  و  $k > 0$  وان مصفوفة التباين المشترك ومتجه التحيز لـ (IGRM) يكون كالاتي:

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{RRE}^{IGRE}) = \phi(Q\Lambda_k^{-1}\Lambda\Lambda_k^{-1}Q^T) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Bias} = \mathbf{b}_{RRE} &= \text{bias}(\hat{\beta}_{RRE}^{IGRE}) \\ &= -k(D + kI)^{-1} \beta \end{aligned} \quad (17)$$

حيث إن:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \text{ و } \Lambda_k = \text{diag}(\lambda_1 + k, \lambda_2 + k, \dots, \lambda_p + k)$$

لذلك، فإن مصفوفة متوسط مربعات الخطأ Matrix Mean Squared Error (MMSE) لـ (IGRE) ستكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{MMSE}(\hat{\beta}_{RRE}^{\text{IGRE}}) &= \text{cov}(\hat{\beta}_{RRE}^{\text{IGRE}}) + \mathbf{b}_{RRE} \mathbf{b}_{RRE}^T \\ &= \phi(\mathbb{Q} \Lambda_k^{-1} \Lambda \Lambda_k^{-1} \mathbb{Q}^T) \\ &\quad + k^2 \mathbb{Q} \Lambda_k^{-1} \beta \beta^T \Lambda_k^{-1} \mathbb{Q}^T \end{aligned} \quad (18)$$

ويتم إيجاد و (MSE) لـ (IGRE) من خلال اخذ أثر المصفوفة للمعادلة أعلاه وكالآتي:

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\beta}_{RRE}^{\text{IGRE}}) &= \text{tr} [\text{MMSE}(\hat{\beta}_{RRE}^{\text{IGRE}})] \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + k)^2} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

حيث إن  $\alpha = \mathbb{Q}^T \beta$ ،  $k$  هي معلمة انحياز انحدار الحرف.

**مقدر ليو Liu Estimator**: تم اقتراح مقدر ليو من قبل الباحث ليو (Kejian, 1993) وذلك لمعالجة مشكلة التعدد الخطي، (Naveed et al., 2022: 4) اقترحوا مقدر ليو لنموذج انحدار غاوس المعكوس (IGR) والذي يكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}} &= (X' \widehat{W} X + I)^{-1} (X' \widehat{W} X + dI) \hat{\beta}_{MLE}^{\text{IGRE}} \\ \hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}} &= (D + I)^{-1} (D + dI) \hat{\beta}_{MLE}^{\text{IGRE}} \end{aligned} \quad (20)$$

حيث إن  $d$  هي معلمة التحيز لمقدر ليو وتكون قيمتها  $0 < d < 1$ .

وان التحيز والتباين يمكن الحصول عليهما كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}}) &= \phi(\mathbb{Q} \Lambda_I^{-1} \Lambda_d \Lambda^{-1} \Lambda_d \Lambda_I^{-1} \mathbb{Q}^T) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_{LE} = \text{Bias}(\hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}}) = \mathbb{Q}(d - 1) \Lambda_I^{-1} \beta \quad (22)$$

حيث ان:

$$\Lambda_d = \text{diag}(\lambda_1 + d, \lambda_2 + d, \dots, \lambda_p + d)$$

$$\Lambda_I = \text{diag}(\lambda_1 + I, \lambda_2 + I, \dots, \lambda_p + I) \text{ و}$$

$$\begin{aligned} \text{MMSE}(\hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}}) &= \text{cov}(\hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}}) + \mathbf{b}_{LE} \mathbf{b}_{LE}^T \\ &= \phi(\mathbb{Q} \Lambda_I^{-1} \Lambda_d \Lambda^{-1} \Lambda_d \Lambda_I^{-1} \mathbb{Q}^T) \\ &\quad + (d - 1)^2 \mathbb{Q} \Lambda_I^{-1} \beta \beta^T \Lambda_I^{-1} \mathbb{Q}^T \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{MSE}(\hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}}) = \text{tr} [\text{MMSE}(\hat{\beta}_{LE}^{\text{IGRE}})]$$

$$= \phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^2} + (d - 1)^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + 1)^2} \quad (24)$$

المقدر المقترح (MIGLE) **Proposed estimator**: في هذا البحث، تم اقتراح تطبيق مقدر ليو غاوس المعكوس المعدل (MIGLE) Modified Inverse Gaussian Liu Estimator لمعالجة مشكلة التعدد الخطي من خلال توسيع عمل (Amin et al., 2021;4) على النحو الآتي:

$$\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE} = (X'WX + I_r)^{-1} (X'WX - d_0 I_r) \hat{\beta}_{MLE}^{IGRE}$$

$$\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE} = (D + I_r)^{-1} (D - d_0 I_r) \hat{\beta}_{MLE}^{IGRE} \quad (25)$$

حيث إن  $D = X'WX$ . يوفر هذا التعديل تحسناً كبيراً في فعالية أداء MIGLE الجديد. سينتج المقدر المقترح دائماً MSE أصغر مقارنة بـ MLE وIGLE. يتم إعطاء التحيز والتباين وMMSE لـ MIGLE المقترح على التوالي على النحو الآتي:

$$cov(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE}) = \phi ((D + I_r)^{-1} (D - d_0 I_r) D^{-1} (D - d_0 I_r) (D + I_r)^{-1}) \quad (26)$$

$$\mathbf{b}_{LE} = Bias(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE}) = -(d_0 - 1)(D + I_r)^{-1} \beta \quad (27)$$

$$MMSE(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE}) = cov(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE}) + \mathbf{b}_{LE} \mathbf{b}_{LE}^T$$

$$MMSE(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE}) = \phi ((D + I_r)^{-1} (D - d_0 I_r) D^{-1} (D - d_0 I_r) (D + I_r)^{-1} + (d_0 - 1)^2 (D + I_r)^{-1} \beta \beta^T (D + I_r)^{-1})$$

$$MSE(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE}) = \text{tr} [MMSE(\hat{\beta}_{LE}^{MIGRE})]$$

$$= \phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j + d_0)^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^2} + (d_0 - 1)^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + 1)^2} \quad (28)$$

اختيار معلمة تحيز مقدر ليو **Selection of the shrinkage Liu parameter**: إن عملية اختيار قيمة معلمة التحيز  $d$  مهمة جداً حيث أنه لا توجد قاعدة محددة لاختيار معلمة  $d$  Liu، يتم استخدام عدة طرق مختلفة لحساب معاملات التحيز. في هذا البحث يتم اختيار قيمة  $d_0$  من خلال أخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (28) بالنسبة إلى  $d_0$  ومساواتها بالصفر، سوف نحصل على قيمة  $d_0$  كالآتي:

$$d_0^j = \frac{\lambda_j(1 + \alpha_j^2)}{1 + \alpha_j^2 \lambda_j} \quad (29)$$

في المعادلة (29)، نستبدل  $\alpha$  بتقديرها غير المتحيز ونحصل على:

$$\hat{d}_0^j = \frac{\lambda_j(1 + \hat{\alpha}_j^2)}{1 + \hat{\alpha}_j^2 \lambda_j} \quad (30)$$

وإن أقل قيمة لمعلمة التحيز  $d_0$  يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\hat{d}_0^{min} = \min \left( \frac{\lambda_j(1 + \hat{\alpha}_j^2)}{1 + \hat{\alpha}_j^2 \lambda_j} \right) \quad (31)$$

**المحاكاة The Simulation**: وضعت العديد من التعريفات للمحاكاة من قبل الباحثين الذين تعاملوا مع هذا المفهوم، فقد تختلف التعابير فيها ولكنها في الأساس مفهوماً واحد للمحاكاة. يقصد بالمحاكاة هي تمثيل أو تقليد للواقع الحقيقي للنظام باستخدام نماذج معينة مكتوبة وفق أسلوب برمجي وبتكرارات معينة من أجل الحصول على نتائج تجريبية هدفها هو التحقق من النتائج التي تم الحصول عليها من الجانب النظري من أجل اختيار الأسلوب الأمثل للتحليل.

إجمالاً يمكن القول بأن المحاكاة أسلوب رياضي يتضمن برنامجاً منفذاً عبر الحاسب الالكتروني يضم كافة عناصر النظام أو العناصر المؤثرة في الجزء المطلوب محاكاته، إذ يؤدي تشغيل هذا البرنامج إلى بيان تتابع الاحداث الممكن حصولها في الواقع، إذ يعكس ذلك حصول الباحث على تصور شامل لما سينتج عند تشغيل النظام الحقيقي وما ستؤول إليه الظاهرة المدروسة عند ظروف مختلفة، فضلاً عن نتائج الافتراضات التي يرغب الباحث في ادخالها على النظام لغرض تطوير أدائه.

**وصف تجربة المحاكاة Description Simulation Experiment**: في هذا القسم تم استعمال لغة البرمجة  $(R)$  في تصميم التجربة ومحاكاتها، تم استخدام تجربة محاكاة مونت كارلو (Mont Carlo) لفحص أداء (MIGLE) في نموذج (IGRE) كالآتي:

1. استخدام درجات مختلفة من معاملات الارتباط  $(r)$ ، تم استخدام معاملات الارتباط الآتية  $(0.90, 0.95, 0.99)$ .
2. تم استخدام قيم متغيرة من المتغيرات التوضيحية  $(p)$  حيث تم اعتماد عدد المتغيرات التوضيحية  $(5, 10, 15)$ .
3. استخدام احجام مختلفة من العينات  $(n)$ ، وأحجام العينات كانت  $(50, 100, 150)$ .
4. تم استخدام قيمتين لمعلمة التشتت  $(1, 1.5)$ .

حيث تم توليد المتغيرات التوضيحية  $(x_j)$  وتعاني من مشكلة التعدد الخطي من خلال المعادلة الآتية:

$$x_{ij} = (1 - \rho^2)^{1/2} c_{ij} + \rho c_{i(j+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (31)$$

إذ إن:

$\rho$ : يمثل الارتباط بين اثنين أو أكثر بين المتغيرات.

$c$ : حيث يشير  $c_{ij}$  إلى الأرقام القياسية شبه العشوائية العادية المستقلة (pseudo-random numbers).  
تم توليد قيم المعلمات الأولية ( $\beta$ ) وهي متجه القيم الذاتية الأكبر والتي يتم إيجادها من المصفوفة  $X^T W X$ .

يتم توليد متغير المعتمد من توزيع غاوس المعكوس من خلال المعادلة الآتية:

$$y_i \sim \text{inverseGaussain}(\mu_i, \tau)$$

إذ إن:

$$\mu_i = \exp(x_i^T \beta)$$

تم تكرار التجربة (1000) مرة لغرض تقليل التحيز.

**مقياس المقارنة بين الطرائق المستخدمة:** لغرض المقارنة بين طرائق التقدير المستخدمة ومعرفة الطريقة الأفضل تم الاعتماد على متوسط مربعات الخطأ ( $MSE$ ) وإن صيغته هي كالتالي:

$$MSE = \frac{\sum_{r=1}^R (\widehat{\beta}_r - \beta)^T (\widehat{\beta}_r - \beta)}{R} \quad (29)$$

إذ إن:

$\widehat{\beta}_r$ : هي قيمة المعلمة المقدرة على أساس طرائق التقدير المختلفة.

$\beta$ : هي القيمة الحقيقية للمعلمات.

$R$ : عدد مرات تكرار التجربة.

**نتائج المحاكاة The results of the simulation:** باستخدام أسلوب المحاكاة التي تم إجرائها على نموذج انحدار غاوس المعكوس (IGRM) الذي يتضمن المقدرات المستخدمة الذي يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

تم تلخيص نتائج المحاكاة في الجداول رقم 1-6، عند، تم إيجاد معيار MSE اعتماداً على العوامل المتعددة وهي المتغيرات التوضيحية  $p$ ، حجم العينة  $n$ ، وقوة الارتباط  $\rho$ ، ومعلمة التشتت  $\phi = 1, 1.5$ ، تم الحصول على الاستنتاجات التالية:

بينت النتائج أن أفضل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ MSE والتي تم توضيحها باللون الغامق. نلاحظ من خلال الجداول رقم 1-6، أن الطريقة المقترحة MIGLE لديه أفضل أداء مقارنة بالمقدرات الحالية في جميع الظروف تقريباً.

يكون أداء الطريقة المقترحة MIGLE أفضل من المقدرات الأخرى. ونلاحظ من الجداول رقم 1-6 ان مقدر MIGLE يقدم أداءً أفضل من كل من المقدرات IGRR, IGLE MLE.

فضلا عن ذلك فإن مقدر MLE يمتلك أسوأ أداء بين المقدرات الأخرى حيث يتأثر بمشكلة التعدد الخطي.

عندما يزداد حجم العينة  $n$  مع ثبوت قيم الارتباط والمتغيرات التوضيحية  $\rho$  و  $p$  فيمكن ملاحظة أن قيمة MSE تتناقص مع زيادة حجم العينة. أي إن زيادة حجم العينة له أثر إيجابي على أداء جميع المقدرات. وخصوصا قيم MSE للمقدر المقترح تتناقص عند مقارنتها بالمقدرات الأخرى. هذا يعني إذا كانت هناك زيادة كافية في احجام العينات فيمكن أن تنتج تقديرات مستقرة. ونلاحظ أن الزيادة في قيمة الارتباط تعطي ارتفاعاً يؤدي إلى زيادة قيم MSE للمقدرات عند ثبوت قيم  $n$  و  $p$ . خصوصا عندما تكون قيمة الارتباط  $\rho = 0.99$  فإن قيم MSE تكون عالية جدا. بالنسبة لمعلمة التشتت  $\phi$  نلاحظ زيادة MSE لجميع المقدرات مع زيادة  $\phi$ .

وكذلك بالنسبة لعدد المتغيرات التوضيحية  $p$ ، فيمكن ملاحظة أن الزيادة في عدد المتغيرات  $p$  ينتج عنها زيادة في قيم MSE لجميع المقدرات المستخدمة.

الجدول (1): متوسط قيم MSE عندما  $n = 50$  و  $\phi = 1$

$p$	$\rho$	MLE	IGRR	IGLE	MIGLE
5	0.90	8.3231	5.6501	4.6451	3.3911
	0.95	11.5411	10.0061	9.7411	3.8051
	0.99	14.4381	10.4411	10.2031	4.1501
10	0.90	8.3476	5.6746	4.6696	3.4156
	0.95	11.5656	10.0306	9.7656	3.8296
	0.99	14.4626	10.4656	10.2276	4.1746
15	0.90	8.5291	5.8561	4.8511	3.5971
	0.95	11.7471	10.2121	9.9471	4.0111
	0.99	14.6441	10.6471	10.4091	4.3561

المصدر: اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

الجدول (2): متوسط قيم MSE عندما  $n = 100$  و  $\phi = 1$

$p$	$\rho$	MLE	IGRR	IGLE	MIGLE
5	0.90	7.3021	4.6291	3.6241	2.3701
	0.95	10.5201	8.9851	8.7201	2.7841
	0.99	13.4171	9.4201	9.1821	3.1291
10	0.90	7.3266	4.6536	3.6486	2.3946
	0.95	10.5446	9.0096	8.7446	2.8086
	0.99	13.4416	9.4446	9.2066	3.1536
15	0.90	7.5081	4.8351	3.8301	2.5761
	0.95	10.7261	9.1911	8.9261	2.9901
	0.99	13.6231	9.6261	9.3881	3.3351

المصدر: اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

الجدول (3): متوسط قيم MSE عندما  $n = 150$  و  $\phi = 1$

$p$	$\rho$	MLE	IGRR	IGLE	MIGLE
5	0.90	7.1981	4.5251	3.5201	2.2661
	0.95	10.4161	8.8811	8.6161	2.6801
	0.99	13.3131	9.3161	9.0781	3.0251
10	0.90	7.2226	4.5496	3.5446	2.2906
	0.95	10.4406	8.9056	8.6406	2.7046
	0.99	13.3376	9.3406	9.1026	3.0496
15	0.90	7.4041	4.7311	3.7261	2.4721
	0.95	10.6221	9.0871	8.8221	2.8861
	0.99	13.5191	9.5221	9.2841	3.2311

المصدر اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

الجدول (4): متوسط قيم MSE عندما  $n = 50$  و  $\phi = 1.5$

$p$	$\rho$	MLE	IGRR	IGLE	MIGLE
5	0.90	8.1061	5.4331	4.4281	3.1741
	0.95	11.3241	9.7891	9.5241	3.5881
	0.99	14.2211	10.2241	9.9861	3.9331
10	0.90	8.1306	5.4576	4.4526	3.1986
	0.95	11.3486	9.8136	9.5486	3.6126
	0.99	14.2456	10.2486	10.0106	3.9576
15	0.90	8.3121	5.6391	4.6341	3.3801
	0.95	11.5301	9.9951	9.7301	3.7941
	0.99	14.4271	10.4301	10.1921	4.1391

المصدر اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

الجدول (5): متوسط قيم MSE عندما  $n = 100$  و  $\phi = 1.5$

$p$	$\rho$	MLE	IGRR	IGLE	MIGLE
5	0.90	7.0851	4.4121	3.4071	2.1531
	0.95	10.3031	8.7681	8.5031	2.5671
	0.99	13.2001	9.2031	8.9651	2.9121
10	0.90	7.1096	4.4366	3.4316	2.1776
	0.95	10.3276	8.7926	8.5276	2.5916
	0.99	13.2246	9.2276	8.9896	2.9366
15	0.90	7.2911	4.6181	3.6131	2.3591
	0.95	10.5091	8.9741	8.7091	2.7731
	0.99	13.4061	9.4091	9.1711	3.1181

المصدر اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

الجدول (6): متوسط قيم MSE عندما  $n = 150$  و  $\phi = 1.5$

$p$	$\rho$	MLE	IGRR	IGLE	MIGLE
5	0.90	6.9811	4.3081	3.3031	2.0491
	0.95	10.1991	8.6641	8.3991	2.4631
	0.99	13.0961	9.0991	8.8611	2.8081
10	0.90	7.0056	4.3326	3.3276	2.0736
	0.95	10.2236	8.6886	8.4236	2.4876
	0.99	13.1206	9.1236	8.8856	2.8326
15	0.90	7.1871	4.5141	3.5091	2.2551
	0.95	10.4051	8.8701	8.6051	2.6691
	0.99	13.3021	9.3051	9.0671	3.0141

المصدر: اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

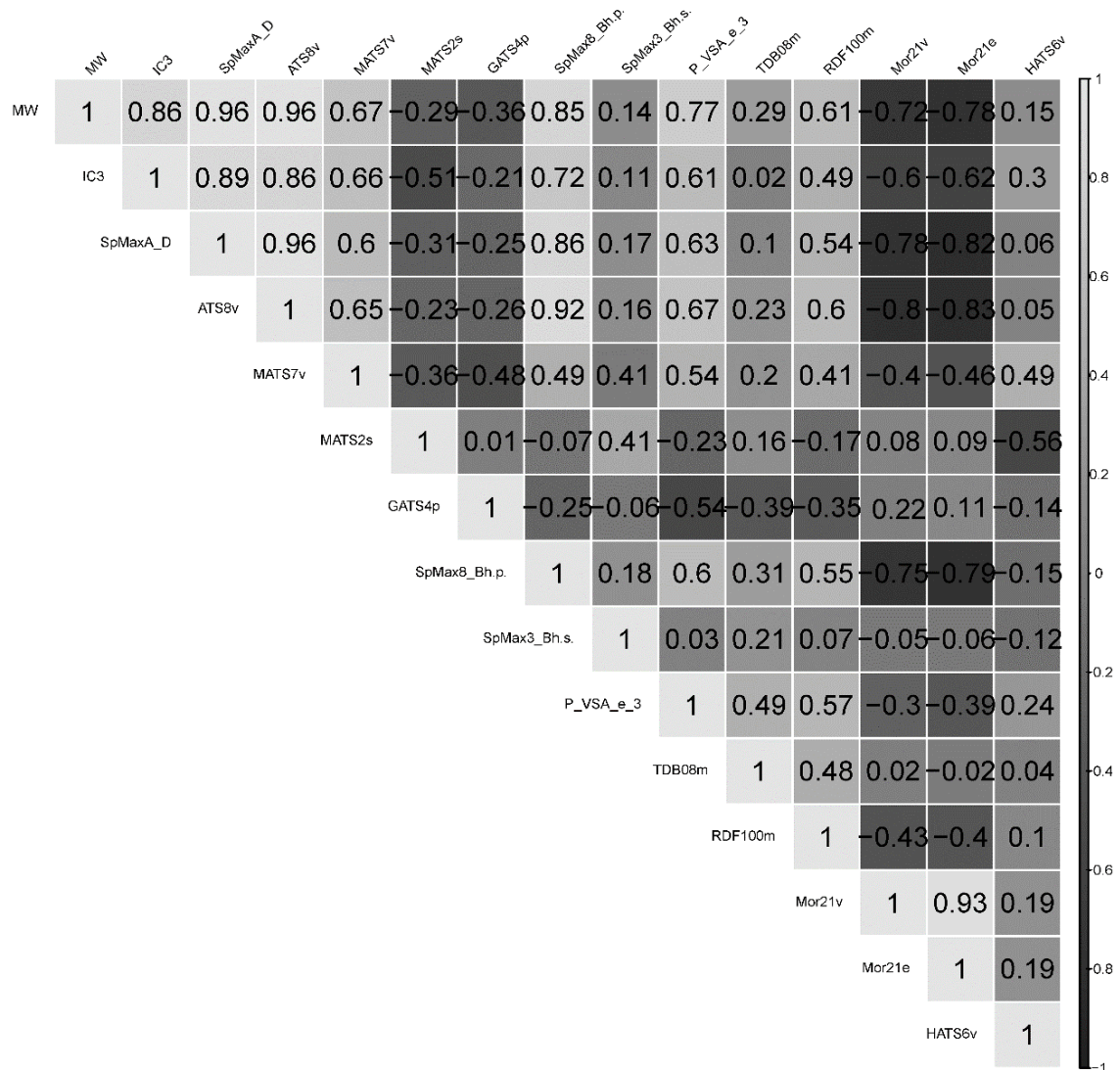
### المحور الثالث: الجانب التطبيقي

في هذا الجانب، نقوم بمقارنة أداء المقدر المقترح MIGLE بالمقدرات الأخرى من خلال استخدام بيانات من الواقع الحقيقي. يتم الحكم على أداء المقدرات من خلال معيار MSE. للتحقق من أداء الطريقة المقترحة MIGLE من خلال البيانات الحقيقية، تم استخدام بيانات كيميائية  $(n, p) = (65, 15)$  تمثل  $n$  عدد مشتقات imidazole[4,5-b] pyridine وهي مركبات مضادة للسرطان وإن  $p$  تمثل المتغيرات التوضيحية وترمز لعدد الصفات الجزيئية (Yahya Algamal, 2019: 10).

يعد المتغير  $(IC_{50})$  هو متغير الاستجابة ويشير إلى الأنشطة البيولوجية للمركبات المضادة للسرطان، وإن دراسة العلاقة الكمية بين التراكيب والفاعلية QSAR من المواضيع المهمة في المؤشرات الكيميائية. ويعرف QSAR أنه نمذجة الأنشطة البيولوجية على مجموعة من المركبات الكيميائية من حيث الخصائص الهيكلية (Algamal & Lee, 2017: 1).

تم استخدام اختبار مربع كاي للمطابقة لمعرفة ما إذا كان متغير الاستجابة  $(IC_{50})$  ينتمي إلى توزيع غاوس المعكوس وكانت النتيجة تساوي 5.2762 وإن قيمة p-value هي 0.2601. ومن خلال هذه النتيجة أن توزيع غاوس المعكوس يكون ملائماً للمتغير الاستجابة او المعتمد. (Algamal, 2019: 12)

في هذه الدراسة، يوجد 15 واصفاً جزيئياً يمثلون المتغيرات التوضيحية (المستقلة)، يظهر الشكل 1 مصفوفة الارتباط بين المتغيرات التوضيحية. ويمكن رؤية أن هناك ارتباطات أكبر من 0.90 بين كلاً من MW, SpMaxA\_D مع ATS8v ( $r = 0.96$ ) و SpMax3\_Bh(s) مع ATS8v ( $r = 0.92$ ) و Mor21v مع Mor21e ( $r = 0.93$ ).



الشكل (1): مصفوفة الارتباط بين 15 متغير من المتغيرات التوضيحية

المصدر اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

لكشف وجود الارتباط بين المتغيرات التوضيحية بعد ملائمة نموذج انحدار غاوس المعكوس، تم

الحصول على القيم المميزة للمصفوفة  $X^T W X$  وهي:

$3.445 \times 10^6, 2.163 \times 10^5, 2.388 \times 10^4, 1.290 \times 10^3, 9.120 \times 10^2, 1.884 \times 10^9$

$4.431 \times 10^2, 1.839 \times 10^2, 1.056 \times$

$10^2, 5525, 3231, 2631, 1654, 1008, \text{ and } 1.115$

وإن العدد الشرطي المحدد هو  $CN = \sqrt{\lambda_{max}/\lambda_{min}} = 40383.035$  وهذا يعني

أن هناك ارتباط كبير بين المتغيرات التوضيحية.

إن المعلمات المقدرة لنموذج انحدار غاوس المعكوس وقيم متوسط مربعات الخطأ MSE للمقدرات، IGRR, IGLE و MIGLE والتي تم ايجازها في الجدول رقم 8. أظهرت أن المقدر المقترح MIGLE يتفوق أداءه على المقدرات الأخرى، حيث امتلك المقدر المقترح MIGLE أقل قيمة MSE، وبالتالي أن المقدر المقترح MIGLE كان أداءه أفضل من باقي المقدرات. بناءً على نتائج المحاكاة ونتائج التطبيق الحقيقي، استنتجنا أن المقدر المقترح MIGLE يعطي نتائج أفضل مقارنة بالمقدرات الأخرى قيد الدراسة في ظل وجود علاقة خطية متعددة.

الجدول (7): وصف المتغيرات التوضيحية

Variable name's	Description
M W	"molecular weight"
I C 3	"Information Content index (neighborhood symmetry of 3-order)"
Sp MaxAD	"normalized leading eigenvalue from topological distance matrix"
ATS8v	"Broto-Moreau autocorrelation of lag 8 (log function) weighted by van der Waals volume"
MATS 7v	"Moran autocorrelation of lag 7 weighted by van der Waals volume"
MATS 2s	"Moran autocorrelation of lag 2 weighted by I-state"
GATS 4p	"Geary autocorrelation of lag 4 weighted by polarizability"
SpMax8 Bh(p)	"largest eigenvalue n. 8 of Burden matrix weighted by polarizability"
SpMax3 Bh(s)	"largest eigenvalue n. 3 of Burden matrix weighted by I-state"
P VSA e_3	"P_VSA-like on Sanderson electronegativity, bin 3"
TDB 08m	"3D Topological distance based descriptors lag 8 weighted by mass"
RDF 100m	"Radial Distribution Function 100 / weighted by mass"
Mor 21v	"signal 21 / weighted by van der Waals volume"
Mor 21e	"signal 21 / weighted by Sanderson electronegativity"
HATS 6v	"leverage-weighted autocorrelation of lag 6 weighted by van der Waals volume"

المصدر اعداد الباحث.

الجدول (8): المعاملات المقدرة وقيم MSE للمقدرات المستخدمة

	IGRR	IGLE	MIGLE
$\hat{\beta}_{MW}$	0.741	0.852	0.617
$\hat{\beta}_{IC3}$	0.977	1.104	0.881
$\hat{\beta}_{SpMaxA\_D}$	-1.363	-1.304	-1.204
$\hat{\beta}_{ATS8v}$	-1.64	-1.581	-1.186
$\hat{\beta}_{MATS7v}$	-1.48	-1.434	-1.124
$\hat{\beta}_{MATS2s}$	-1.476	-1.420	-1.137
$\hat{\beta}_{GATS4p}$	-1.498	-1.439	-1.154
$\hat{\beta}_{SpMax8\_Bh(p)}$	2.245	2.304	2.589
$\hat{\beta}_{SpMax3\_Bh(s)}$	1.808	1.867	2.152
$\hat{\beta}_{P\_VSA\_e\_3}$	1.739	1.798	2.083
$\hat{\beta}_{TDB08m}$	-2.365	-2.305	-2.02
$\hat{\beta}_{RDF100m}$	1.309	1.368	1.653
$\hat{\beta}_{Mor21v}$	-2.695	-2.636	-2.344
$\hat{\beta}_{Mor21e}$	-2.613	-2.554	-2.269
$\hat{\beta}_{HATS6v}$	1.95	2.017	2.199
MSE	2.041	1.341	1.187

المصدر اعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي.

اولاً. الاستنتاجات: أظهرت نتائج المحاكاة والبيانات الحقيقية أن أداء المقدر المقترح MIGLE يعطي نتائج جيدة بالاعتماد على معيار MSE. ومن خلال ملاحظة حجم العينة  $n$ ، فعندما تزداد  $n$  فإن قيم MSE تتناقص، أما عدد المتغيرات التوضيحية فإن زيادتها تؤثر على قيمة MSE حيث تتضخم قيمة MSE عندما تزداد  $p$ ، وبالنسبة إلى معامل الارتباط  $\rho$  نلاحظ زيادة في قيم MSE عندما تزداد درجة الارتباط وإن المقدر المقترح MIGLE يعطي نتائج أفضل استناداً إلى معيار MSE. أما بالنسبة لمعلمة التشتت  $\sigma^2$ ، فنلاحظ أن قيم MSE تزداد بازدياد قيم  $\sigma^2$ .

## المصادر

1. Akdeniz, F., & Kaçiranlar, S., (2001), More on the new biased estimator in linear regression. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 321–325.
2. Akram, M. N., Amin, M., & Qasim, M., (2020), A new Liu-type estimator for the inverse Gaussian regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 90(7), 1153-1172.
3. Algamal, Z. Y., & Lee, M. H., (2017), A novel molecular descriptor selection method in QSAR classification model based on weighted penalized logistic regression. *Journal of Chemometrics*, 31(10), e2915.
4. Alheety, M. I., & Kibria, B. M. G., (2009), On the Liu and almost unbiased Liu estimators in the presence of multicollinearity with heteroscedastic or correlated errors. *Surveys in Mathematics and Its Applications*, 4, 155-167.
5. Amin, M., Akram, M. N., & Kibria, B. M. G., (2021), A new adjusted Liu estimator for the Poisson regression model. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 33(20), e6340.
6. Amin, M., Qasim, M., Amanullah, M., & Afzal, S., (2020), Performance of some ridge estimators for the gamma regression model. *Statistical Papers*, 61(3), 997-1026.
7. Bhattacharyya, G. K., & Fries, A., (1982), Inverse Gaussian regression and accelerated life tests. *Lecture Notes-Monograph Series*, 2, 101–117.
8. Frisch, R., (1934), *Statistical confluence analysis by means of complete regression systems* (Vol. 5). Universitetets Økonomiske Institut.
9. Hoerl, A. E., & Kennard, R. W., (1970), Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 55-67.
10. Kejian, L., (1993), A new class of biased estimate in linear regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 22(2), 393-402.
11. Khalaf, G., & Shukur, G., (2005), Choosing ridge parameter for regression problems.
12. Kibria, B. M. G., (2012), Some Liu and ridge-type estimators and their properties under the ill-conditioned Gaussian linear regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(1), 1-17.
13. Kibria, B. M. G., & Saleh, A. K. M. E., (2012), Improving the estimators of the parameters of a probit regression model: A ridge regression approach. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142(6), 1421-1435.
14. Kibria, B. M., Månsson, K., & Shukur, G., (2012), Performance of some logistic ridge regression estimators. *Computational Economics*, 40(4), 401-414.
15. Kurtoğlu, F., & Özkale, M. R., (2016), Liu estimation in generalized linear models: application on gamma distributed response variable. *Statistical Papers*, 57(4), 911-928.
16. Liu, K., (2003), Using Liu-type estimator to combat collinearity. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32(5), 1009-1020.
17. Månsson, K., & Shukur, G., (2011), A Poisson ridge regression estimator. *Economic Modelling*, 28(4), 1475-1481. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2011.02.030>
18. Mawlood, K. I., (2021), Estimating Hazard Function and Survival Analysis of Tuberculosis Patients in Erbil city. *Tikrit Journal of Administration and Economics*

- Sciences, 17 (54 part 3).
19. Naveed, K., Amin, M., Afzal, S., & Qasim, M., (2022), New shrinkage parameters for the inverse Gaussian Liu regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(10), 3216–3236.
  20. Qasim, M., Amin, M., & Amanullah, M., (2018), On the performance of some new Liu parameters for the gamma regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(16), 3065–3080.
  21. Qasim, M., Amin, M., & Omer, T., (2020), Performance of some new Liu parameters for the linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 49(17), 4178–4196.
  22. Qasim, M., Kibria, B. M. G., Månsson, K., & Sjölander, P., (2020), A new Poisson Liu regression estimator: method and application. *Journal of Applied Statistics*, 47(12), 2258–2271.
  23. Salh, A. P. D. S. M., Abdalla, H. T., & Omer, Z. M., (2021), Using Multinomial Logistic Regression model to study factors that affect chest pain. *Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences*, 17(53 part 2).
  24. Segerstedt, B., (1992), On ordinary ridge regression in generalized linear models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 21(8), 2227-2246.
  25. Varathan, N., & Wijekoon, P., (2021), Modified almost unbiased Liu estimator in logistic regression. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 50(11), 3530-3546.
  26. Yahya Algamal, Z., (2019), Performance of ridge estimator in inverse Gaussian regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(15), 3836-3849.